b. *Argomento quantitativo*

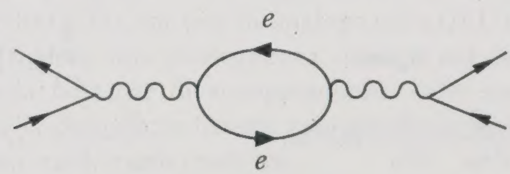
Nella QED alle piccole distanze la carica effettiva di una sorgente cresce a causa della polarizzazione del vuoto.

Si calcoli il potenziale effettivo che si esercita tra due cariche statiche nello spazio degli impulsi:

$$V(q^2) = 4\pi \frac{\alpha(q^2)}{q^2} \tag{26}$$

Il comportamento della costante di accoppiamento effettiva $\alpha(q^2)$ in funzione della distanza può esser calcolato perturbativamente nella QED.

All'ordine più basso,

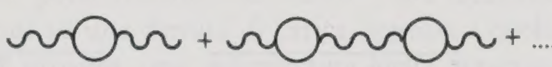


nello spazio degli impulsi, si trova che

$$\alpha(q^2) = \alpha(\mu^2) \left[1 + \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) \right] , \tag{27}$$

$\alpha(\mu^2)$ è la costante di accoppiamento elettromagnetica corrispondente al taglio ultravioletto μ.

Agli ordini più alti:



compare una serie di termini del tipo

$$\left[\alpha(\mu^2) \ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) \right]^n , \tag{28}$$

che, sommata, dà

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right)} + O(\alpha^2) . \tag{29}$$

Per grandi $|q^2|$ (piccole distanze) la costante di *accoppiamento effettiva* $\alpha(q^2)$ *tende* dunque *a crescere*.

Più precisamente essendo

$$\frac{1}{\alpha(q^2)} \simeq \frac{1}{\alpha(\mu^2)} - \frac{1}{3\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) , \tag{30}$$

per valori di q^2 dell'ordine di $\mu^2 \exp\left[\frac{3\pi}{\alpha(\mu^2)}\right]$, la QED diviene una teoria di accoppiamento forte e non vale più lo sviluppo perturbativo.

Nella QCD l'interazione tra campi vettoriali gluonici dà luogo a contributi gluonici alla polarizzazione del vuoto. Essi possono essere separati in contributi di due tipi: il primo, dovuto a gluoni trasversali, lavora nello stesso verso delle coppie e^+e^- nel caso della QED (effetti di schermatura), il secondo dovuto a cosiddetti gluoni di Coulomb, lavora in verso opposto (effetti di antischermatura) e, tenendo conto anche del contributo agli effetti di schermatura dei quark saporiti, si ottiene complessivamente per la costante di accoppiamento effettiva delle interazioni forti

$$\alpha_F(q^2) \simeq \alpha_F(\mu^2)\left[1-(11-\frac{2}{3}N_f)\frac{\alpha_F(\mu^2)}{4\pi}\ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right)\right], \quad (31)$$

con $\alpha_F(q^2)=\frac{g^2}{4\pi}$, μ punto di rinormalizzazione della teoria, N_f numero dei sapori dei quark. I colori sono assunti essere 3.

Sommando come nella QED, sui diagrammi di polarizzazione del vuoto contenenti 1... *n*... bolle si ottiene,

$$\alpha_F(q^2) \simeq \frac{\alpha_F(\mu^2)}{1+\left[11-\frac{2}{3}N_f\right]\frac{\alpha_F(\mu^2)}{4\pi}\ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right)}, \quad (32)$$

ovvero

$$\frac{1}{\alpha_F(q^2)} \simeq \frac{1}{\alpha_F(\mu^2)}+\frac{33-2N_f}{12\pi}\ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right). \quad (33)$$

Di conseguenza al crescere di $|q^2|$ (grandi $|q^2|$, piccole distanze) $\alpha_F(q^2)$ decresce. Naturalmente è essenziale che $(33-2N_f)$ sia positivo: il numero dei sapori non deve quindi superare il 16.

La decrescita di $\alpha_F(q^2)$ al crescere di q^2 è il segno di un indebolirsi progressivo dell'accoppiamento dei sottocostituenti, che, asintoticamente, risulteranno quasi liberi. E' la proprietà della cosiddetta libertà asintotica.

E' convenzione a questo punto riassumere la dipendenza funzionale di α_F da q^2 del termine dominante ridefinendo il punto di norma-

lizzazione. In generale per una teoria con N_c colori ed N_f sapori si ottiene

$$\alpha_F (q^2) = \frac{12\pi}{(11\,N_c - 2\,N_f) \log \frac{-q^2}{\Lambda^2}} \,. \tag{34}$$

Λ è il parametro di scala della teoria e può essere determinato dagli esperimenti. Il suo valore attuale ricavato dai dati di urti di diffusione profonda e di annichilazione e^+e^- è stimato variare in un intervallo che va da 0.2 GeV a 0.7 Gev.

Pertanto la teoria delle perturbazioni in $\alpha_F (q^2)$ diviene affidabile alle piccole distanze.

Λ^{-1} ci dice a che distanza la teoria delle perturbazioni non può più essere applicata; ad esempio per $\Lambda \simeq 500$ MeV, $\Lambda^{-1} \simeq 0.5$ fermi. A distanze sufficientemente grandi (grandi rispetto a 10^{-14} cm) la QCD diviene infatti una teoria di accoppiamento forte: la spiegazione del meccanismo di confinamento del colore coinvolge quindi effetti non-perturbativi. Il problema di una teoria delle interazioni forti alle grandi distanze, che spieghi il confinamento e si saldi colla struttura della QCD alle piccole distanze è però tuttora aperto ed è il *problema* della fisica degli adroni.

La proprietà della QCD di essere una teoria asintoticamente libera provocò grande eccitazione; tale proprietà si sposava bene con le assunzioni del modello a partoni, ritenuti sottocostituenti liberi e puntiformi dell'adrone, destinati a dividersi il quadri-impulso dell'adrone incidente.

Si possedeva finalmente una tecnica che permetteva di calcolare le correzioni alla struttura puntiforme dei partoni. Il modello a partoni non era d'altra parte nato per caso. L'evidenza della esistenza di sottocostituenti duri negli adroni si ha, per esempio, nell'urto pp (ISR) ad energie diverse ed elevate quantità di moto trasversali. Si osserva infatti un aumento della sezione d'urto rispetto all'estrapolazione dei dati ottenuti a basse quantità di moto trasversali, sia all'aumentare dell'energia di collisione che della quantità di moto. Ad energia fissata l'andamento della sezione d'urto è lo stesso di quello notato da Rutherford nell'urto inclusivo

$$\alpha + Au \to \alpha + X \,. \tag{35}$$

All'aumentare della quantità di moto trasversale il numero di particelle α deviate non segue l'estrapolazione prevista dai dati alle basse quantità di moto, ma cresce in modo significativo, e, come questo andamento è da considerare una evidenza di una sottostruttura dell'*atomo* così l'andamento, sopra ricordato, nell'urto pp lo è di una sottostruttura a partoni del *protone*.

Si capì presto però che la libertà asintotica, non implicava la possibilità di applicare lo sviluppo perturbativo in $\alpha_F(q^2)$ in modo automatico e ciò per considerazioni diverse.

Anzitutto le particelle osservate non sono quark e gluoni, ma adroni, e il legame tra i sottocostituenti degli adroni (quark e gluoni) e gli adroni stessi è tuttora da chiarire da un punto di vista dinamico. L'ipotesi di lavoro è che le particelle osservate (lo stato finale della interazione) riflettano le proprietà degli stati finali quarkici e gluonici ottenuti secondo le prescrizioni della QCD. E' questa però solo una ipotesi di lavoro, non verificata sperimentalmente, per la cui fondatezza si possono invocare solo delle prove di consistenza, quali la fattorizzazione delle singolarità di massa, il preconfinamento e la stima di un tempo finito per la creazione di una coppia $q\bar{q}$. Accanto a questa difficoltà, se ne sovrappone un'antra che si può definire più tecnica. La emissione di gluoni soffici e collineari comporta la comparsa nel calcolo di fattori lagaritmici che vanno trattati con certe cautele per il loro contributo non trascurabile. Limitando il settore di interesse della teoria agli urti cosiddetti duri (urti ad elevata quantità di moto trasversale), che ne costituiscono il terreno naturale di applicazione, ci si attende per la sezione d'urto sulla base di argomentazioni dimensionali e di rinormalizzazione una struttura del tipo

$$\sigma = \frac{1}{q^2} f(\alpha_F(q^2), \frac{q^2}{m^2}, x), \qquad (36)$$

ove m sta per i parametri di massa che regolarizzano le divergenze infrarosse o collineari ed x rappresenta rapporti adimensionali di variabili grandi.

PARTE II

1. I getti nella QCD

La formazione di getti di adroni è uno degli aspetti più spettacolari delle interazioni dure. Vanno sotto tale nome l'annichilazione e^+e^- in adroni, gli urti di diffusione profonda leptone-adrone ed in genere gli urti adrone-adrone ad alte quantità di moto trasversali.

L'osservazione sperimentale (SPEAR 1975) mostra che la sfericità di un evento nella annichilazione e^+e^- in adroni diminuisce al crescere dell'energia nel centro di massa, l'emissione degli adroni diviene sempre più collimata, gettiforme; tale osservazione è in aperto disaccordo colla isotropia della distribuzione degli adroni prevista dallo spazio delle fasi. L'esistenza dei getti di adroni è stata successivamente confermata anche a PETRA. E' tale osservazione compatibile collo sviluppo perturbativo in $\alpha_F(q^2)$?

Una via per evitare complicazioni patologiche è quella di riorganizzare lo sviluppo della funzione $f(\alpha_F(q^2), \frac{q^2}{m^2}, x)$, che compare nelle sezioni d'urto, secondo lo schema

$$f(\alpha_F(q^2), \frac{q^2}{m^2}, x) = f_1 + \alpha_F(q^2) f_2 + \ldots \qquad (1)$$

ove

$$f_i \equiv f_i\left(\alpha_F \log \frac{q^2}{m^2}, x\right) \qquad (2)$$

e di arrestarsi al primo termine dello sviluppo.

E' la cosiddetta approssimazione di logaritmo dominante (LLA). In pratica si trascurano le potenze in α_F che non sono compensate da un termine logaritmico.

E' stato provato a conferma della validità di questo metodo che le f_i non dipendono da m^2 (fattorizzazione delle masse).

Va ricordato che nel gauge assiale la LLA si semplifica considerevolmente: gli effetti di interferenza tra ampiezze diverse possono essere trascurati, i diagrammi "planari" sono dominanti ed è possibile ristabilire anche per una teoria vettoriale come la QCD una interpretazione probabilistica (semi-partonica). Nel prossimo paragrafo si tornerà su

questa proprietà della LLA che ben si presta allo studio della evoluzione di un singolo getto.

Una seconda via è di pensare allo sviluppo

$$f = f_1 + \alpha_F f_2 + \ldots \tag{3}$$

ove

$$f_i \equiv f_i(x) \, . \tag{4}$$

Le singolarità di questo sviluppo nel limite $m \rightarrow 0$ sono evitate sommando in modo opportuno sugli stati finali, cioè lavorando di fatto colle sezioni d'urto totali, che chiaramente devono esserne prive. L'idea di Feynman è di pensare un *quark* come un *getto di partoni* (quark o gluoni) *da quark* e un *gluone* come un *getto di partoni* (quark o gluoni) *da gluone*; quindi di definire i getti in modo tale che le sezioni d'urto per produrli siano finite.

Questa idea viene ripresa da Sterman e Weinberg che propongono di completarla introducendo una risoluzione *in energia* per curare le divergenze infrarosse della teoria ed *in angolo* per curarne le divergenze collineari.

La analogia con la bremsstrahlung è evidente. Un elettrone urta su una sorgente carica ed emette un fotone. E' noto che, in conseguenza della struttura dello spetrro in energia del fotone irradiato (dk/k), la probabilità di emettere un fotone a energia zero diviene infinita. Questo risultato teorico deve però fare i conti colla risoluzione *finita* in energia ΔE del contatore. Il contatore non distingue elettroni diffusi inelasticamente, con l'emissione di un fotone $k < \Delta E$, dagli elettroni elastici che rimbalzano sulla sorgente. Se si vuole operare in modo coerente si devono includere, quindi, nella valutazione della sezione d'urto accanto ai diagrammi divergenti di bremsstrahlung anche quelli dovuti alle *correzioni radiative* della sezione d'urto elastica allo stesso ordine di quelli della bremsstrahlung ed anch'essi divergenti. L'aggiunta di queste correzioni di diagrammi di diffusione inelastica cancella le divergenze presenti e dà un valore *finito* della probabilità di trovare un elettrone più un certo numero di fotoni soffici diffusi inelasticamente ad un certo angolo. L'elettrone in questione può dunque esser inteso come un *getto di fotoni soffici da elettrone* e — si noti — con numeri quantici di carica ed energia ben definiti.

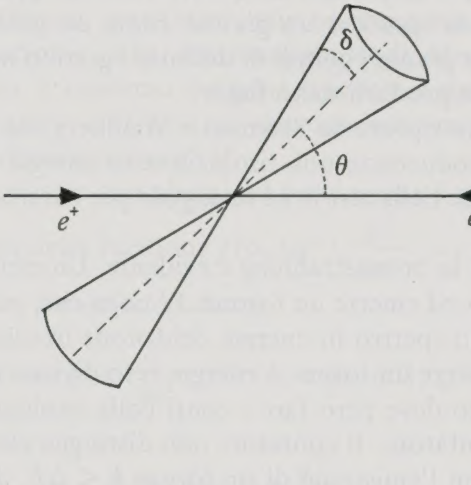
Naturalmente rispetto alla bremssthralung classica bisogna ricorda-

re che oltre ai processi in cui i quark irradiano gluoni si hanno processi in cui i gluoni irradiano gluoni e coppie quark-antiquark.

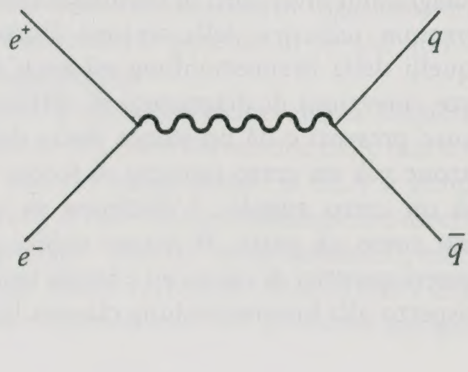
E' chiara la speranza che i getti di partoni generati dai quark o dai gluoni non si defocalizzino troppo quando i partoni prodotti, che li compongono, diventano adroni.

Gli osservabili sono infatti i getti di adroni.

L'esperimento ci dice che la distribuzione degli adroni nel getto, orientato secondo un angolo θ rispetto all'asse di collisione e^+e^-, è della forma $(1+\cos^2\theta)$. Tale forma è attesa per la produzione di due quark puntiformi di spin 1/2: $e^+e^- \to q\bar{q}$



Nell'approssimazione di Born:



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = \frac{\alpha^2}{4E^2_{\text{C.M.}}}\ 3 \sum_{i=\text{sapori}} e_i^2\,(1+\cos^2\theta)\,, \qquad (5)$$

e_i^2 = quadrato della carica dell'i-esimo sapore.

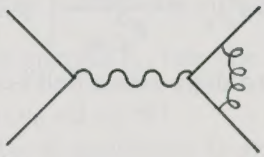
La QCD permette di calcolare le correzioni di ordine α_F alla (5), che può essere considerato termine di ordine zero.

Sterman e Weinberg suggeriscono di valutare, per $E_{\text{C.M.}}$ fissato, la sezione d'urto $\sigma(E_{\text{C.M.}}, \delta, \epsilon, \theta)$ per tutti gli eventi in annichilazione per i quali una frazione di energia $(1-\epsilon)E_{\text{C.M.}}$ è emessa entro una coppia di coni opposti di apertura angolare 2δ con $\epsilon, \delta \ll 1$.

I calcoli vengono eseguiti assegnando una massa fittizia al gluone ($m_g \ll \epsilon E_{\text{C.M.}}$) e ponendo uguale a zero la massa dei quark ($m_q = 0$).

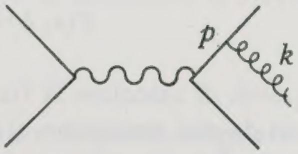
All'ordine α_F si sommano tutti i contributi dello stesso ordine:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_1 :$$



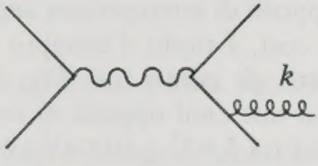
(6)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_2 :$$



(7)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_3 :$$



(8)

La (6) tiene conto delle correzioni di vertice + ... ; la (7) corrisponde alla emissione di un gluone collineare duro con $E_g > \epsilon E_{\text{C.M.}}$ ma con $\theta_g < \delta (p \cdot k \to 0)$ [la finitezza di δ assicura nel risultato finale l'assenza di singolarità collineari di massa]; la (8) dà il contributo dovuto alla emissione di un gluone soffice $E_g < \epsilon E_{\text{C.M.}}$ [la finitezza di ϵ assicura un risultato finito nel limite infrarosso].

La somma (6) + (7) + (8) è tale per cui la dipendenza da m_g si

cancella e pertanto la sezione d'urto è finita nel limite $m_g \to 0$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_1 + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_2 + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_3 = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \Big[1 - \\ -4\,\alpha_F\,(3 \ln \delta + 4 \ln \delta \ln 2\epsilon + \frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{2}\Big]. \tag{9}$$

Se $\alpha_F = 0$, $\delta \to 0$ ed $\epsilon = 1$ i quark si possono considerare liberi. $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0$ è dato dalla (5).

Ma la sezione d'urto totale e^+e^- corretta anch'essa dalla QCD all'ordine α_F (correzioni radiative di tipo gluonico alle linee di quark) è data da:

$$\sigma_{e^+e^-} = \frac{4\pi\alpha^2}{E^2_{\text{C.M.}}}\left[3 \sum_i e_i^2 \left(1 + \frac{\alpha_F}{\pi}\right)\right], \tag{10}$$

e_i^2 è il quadrato della carica dell'i-esimo sapore.

Il rapporto

$$F(\epsilon, \delta) = \frac{[9]}{[10]} \tag{11}$$

permette quindi di calcolare la frazione di tutti gli eventi a due getti caratterizzati da una emissione di energia $(1-\epsilon)E_{\text{C.M.}}$ in una coppia di coni opposti di semiapertura angolare δ.

Scelto così, a titolo d'esempio $\Lambda \cong 0.5$ GeV, se si richiede che il 70% di tutti gli eventi (i.e. $F(\epsilon, \delta) = 0.7$) assorba l'80% dell'energia ($\epsilon = 0.2$) in due coni opposti di semiapertura angolare δ la semiapertura varierà tra $\delta = 2°$ a 30 GeV a $\delta = 22°$ a 5 GeV.

Con le stesse tecniche si può studiare l'irradiazione di un gluone *duro* da quark. Si ha così il caso di un getto da gluone: il gluone irradia gluoni e coppie quark antiquark.

Tradotto nei termini della dipendenza angolare dall'energia si troverebbe così che

$$\delta_g(E) = [\delta_q(E)]^{4/9} \tag{12}$$

ove δ_g, δ_q sono rispettivamente le semiaperture angolari di un getto da gluone e da quark. Il getto da gluone è atteso essere più esteso nello spazio di quello da quark.

Similmente si possono dare delle stime quantitative del rapporto tra le strutture a 3 e a 2 getti.

L'applicabilità delle formule viste richiede naturalmente che α_F sia sufficientemente piccolo, onde garantire delle correzioni trascurabili. Va notato che lo stesso metodo, che è stato seguito per definire delle quantità prive di divergenze, ha indotto molti sperimentatori a misurare delle quantità calcolabili all'ordine più basso della QCD ed ad analizzare con esse i getti (si tratta delle cosiddette "nuove variabili" thrust, spherocity, etc. ...). Appena ci si allontana però da questi problemi, relativamente semplici, la situazione si complica e si ricade nelle difficoltà segnalate alla fine della Parte I.

Complementare a questo modo di procedere può esser definita la proposta di coprire l'emisfero corrispondente a un getto da quark nell'annichilazione e^+e^- con piccoli calorimetri, ciascuno di semi-apertura angolare δ. Un calorimetro è detto un mini-getto quando è colpito da un certo quantitativo di energia E_i, tale che $x_i \equiv \dfrac{E_i}{\sum_i E_i}$ sia maggiore di un certo valore fissato x_0 ed $x_0 \ll 1$.

Questa procedura permetterebbe di analizzare la struttura interna del getto.

2. Evoluzione di un getto di quark e di gluoni originato da una e da due cariche di colore.

La domanda cui si vorrebbe rispondere è cosa succede all'interno di un *singolo* getto.

Una caratteristica dei processi duri è di essere incoerenti. Il modello a partoni prende le mosse proprio da questa osservazione. La interferenza tra ampiezze diverse è soppressa dall'incoerenza della produzione e pertanto invece di esprimere la sezione d'urto esclusiva di un processo di produzione di partoni in funzione del quadrato del modulo della somma delle diverse ampiezze, la si esprime direttamente mediante le probabilità, cioè la somma dei moduli quadri delle ampiezze. Come già ricordato (II.1) nella approssimazione del logaritmo dominante (LLA), la scelta di un gauge opportuno del campo gluonico (il gauge assiale o planare) consente di estendere l'interpretazione probabilistica ad una vasta classe di problemi di una teoria *vettoriale*

come la QCD. Il *tipo* di interpretazione probabilistica è suggerito da una proprietà peculiare dei getti: i partoni prodotti (quark o gluoni) sono ordinati nelle masse, ogni partone agisce indipendentemente dagli altri ad ogni generazione; il processo è dunque di tipo markoviano.

La tentazione è di prendere alla lettera questo doppio suggerimento.[1] Il problema è ora di cercare di studiare la ramificazione del getto di partoni (quark o gluoni) originato da un quark (1 carica di colore) o da un gluone (2 cariche di colore) con le tecniche dei processi di Markov in funzione di un parametro di evoluzione, che, assieme alle probabilità elementari dei processi fondamentali, riassume la dipendenza dalla QCD della teoria. Avendo questa idea in mente si può definire il parametro di evoluzione del getto

$$Y = \frac{6}{11\,N_c - 2\,N_f} \log \left[\frac{\log Q^2/\Lambda^2}{\log Q_0^2/\Lambda^2} \right] \tag{13}$$

i.e

$$Y = \frac{6}{11\,N_c - 2\,N_f} \log \left[\frac{\alpha_F\,(q_0^2)}{\alpha_F\,(q^2)} \right]. \tag{14}$$

Si noti che Y è funzione di 3 parametri di scala; il primo, Q^2, è un parametro *grande* nella scala della massa, ci dice quanto lontano dal "mass-shell" è il quark o gluone prima di iniziare il processo di ramificazione, il secondo, Q_0^2 è un parametro *piccolo* nella scala della massa ed è assunto in genere dell'ordine delle masse adroniche, il terzo, Λ^2 è dettato – come già visto – dalla *rinormalizzazione* di scala della teoria. Si indichino quindi rispettivamente con

$$A\,\Delta Y,\ \tilde{A}\,\Delta Y,\ B\,\Delta Y \tag{15}$$

le probabilità elementari che in ΔY avvengano i processi fondamentali

gluone → gluone + gluone $(g \to g + g)$, (16)

quark → quark + gluone $(q \to q + g)$, (17)

e gluone → quark + antiquark $(g \to q + \bar{q})$, (18)

---

[1] E' la linea di ricerca seguita a Torino (vedi (°) in Bibliografia II.2).

ove

$$A = \frac{1}{\epsilon} N_c \, , \quad \widetilde{A} = \frac{1}{\epsilon} \frac{N^2 - 1}{2 N_c} \, , \quad B = \frac{N_f}{3} \, . \tag{19}$$

Si noti che la regolarizzazione della teoria è stata ottenuta introducendo un taglio fisso ϵ (questa regolarizzazione va confrontata con quella dello spazio delle fasi); A, $\widetilde{A}$, B sono stati inoltre assunti indipendenti da Y, ma la teoria è generalizzabile anche al caso in cui le probabilità elementari dipendano da Y, almeno nei casi di interesse fisico. Ciò fatto, usando delle proprietà dei processi stocastici, si ottengono per le funzioni generatrici delle popolazioni di quark e gluoni,

$$\mathbf{G}(u_q, u_g; Y) = \Sigma \, P_{1,0;n_g,n_q}(Y) \; u_g^{n_g} \, u_q^{n_q} \tag{20}$$

$$\mathbf{Q}(u_q, u_g; Y) = \Sigma \, P_{0,1;n_g,n_q}(Y) \; u_g^{n_g} \, u_q^{n_q} \, , \tag{21}$$

[$P_{1,0;n_g,n_q}(Y)$, $P_{0,1;n_g,n_q}(Y)$ sono le probabilità di transizione],

(a) le equazioni di Kolmogorov all'*indietro*

$$\frac{\partial \, \mathbf{G}(u_q, u_g; Y)}{\partial \; Y} = -(A+B)\, \mathbf{G}(u_q, u_g; Y) + A \, \mathbf{G}^2 (u_q, u_g; Y) + + B \mathbf{Q}^2 (u_q, u_g; Y) \, , \tag{22}$$

$$\frac{\partial \, \mathbf{Q}(u_q, u_g; Y)}{\partial \; Y} = -\widetilde{A} \, \mathbf{Q}(u_q, u_g; Y) + + \widetilde{A} \, \mathbf{Q}(u_q, u_g; Y)\, \mathbf{G}(u_q, u_g; Y) \tag{23}$$

con le condizioni iniziali

$$\mathbf{G}(u_q, u_g; 0) = u_g \quad , \quad \mathbf{Q}(u_q, u_g; 0) = u_q \; ; \tag{24}$$

(b) le equazioni di Kolmogorov in *avanti*

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial Y} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial u_g} [-(A+B)\, u_g + A u_g^2 + B u_q^2] + + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial u_q} [-\widetilde{A} u_q + A \, u_q \, u_g] \tag{25}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial Y} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial u_g}[-(A+B)u_g + Au_g^2 + Bu_q^2] + \\ + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial u_q}[-\widetilde{A}u_q + Au_q u_g] . \tag{26}$$

E' facile scrivere l'equivalente di questo sistema di equazioni per le probabilità di transizione.

Le equazioni di Kolmogorov sono state ricavate supponendo di seguire l'evoluzione di tutti i partoni (quark o gluoni) prodotti nel getto.

Se l'interesse è in una parte di essi, ad esempio solo in quelli prodotti ad energie E maggiori di una energia fissata E_0 si ottiene un sistema di equazioni integro-differenziali (equazioni G di Janossy). Opportune condizioni iniziali permetteranno di distinguere anche in questo caso l'evoluzione di quark e gluoni in un getto da quark o da gluone. E' significativo il notare che le equazioni di Kolmogorov all'indietro coincidono con le equazioni di Konishi-Ukawa-Veneziano ricavate in un modo indipendente partendo da processi inclusivi e che le equazioni G di Janossy sono del tipo di quelle di Altarelli e Parisi.

Le equazioni di Komogorov possono essere risolte in tutti i casi di maggiore interesse.

Una struttura costante emerge da esse: le cose in un getto da quark e da gluone vanno come se i quark e gluoni prodotti si ricordassero della loro origine da una (quark) o da due (gluone) cariche di colore. Questo fatto è confermato dalle soluzioni del caso generale ($A \neq \widetilde{A} \neq \neq B$), sia per le molteplicità che per i momenti.

I processi esaminati, mostrano dunque una ramificazione che cresce al crescere di Q^2, cioè più elevato è Q^2 (i.e. più lontano del mass-shell è il quark o il gluone che origina il getto), più dettagli sono percepiti nella sua degradazione in energia verso Q_0^2.

L'attenzione si sposta, quindi, sullo studio del profilo del getto in funzione del potere risolutivo Q^2.

Ora esistono nelle matematiche degli oggetti che condividono con i getti questa struttura, sono i Fracta Autosimili,[2] caratterizzati da una misura di Hausdorff in genere non intera e maggiore di quella topologica.

---

[2] Già noti a Cantor e a Peano.

Dei due termini il primo (Fracta) indica un principio di *irregolarità*, il secondo di *ordine* (Autosimili). L'evoluzione dei Fracta Autosimili è il risultato della competizione tra questi due meccanismi (vedi Figure).

E' la stessa partita giocata tra l'incoerenza e l'ordinamento delle masse in un getto, assunte a base della nostra trattazione stocastica.

Questa idea, solo in parte esplorata, getta nuova luce sullo studio della evoluzione spazio-temporale di un getto ed invita a sondare con maggior cura il legame che esiste tra le teorie di campo invarianti di scala e i processi stocastici, secondo quanto a suo tempo già intuito da Polyakov, Orfanidis e Rittenberg.

Conclusioni

La QCD offre uno schema di una teoria dinamica delle interazioni forti, per ora solo in parte verificato.

Ha dato delle buone risposte qualitative sul problema della statistica dei quark, sulla fisica delle piccole distanze, ove uno sviluppo perturbativo in α_F pare possibile, e ha indicato le forze che dovrebbero confinare i quark negli adroni.

Le sue predizioni sperimentali sono decisamente superiori alle attese teoriche e risultano con esse qualitativamente compatibili, anche se non si può invocare un solo esperimento cruciale per sostenere o rigettare la teoria.

La parola è — come sempre — alla nuova generazione di macchine, tra le quali primeggiano i progetti e^+e^- (LEP) e $p\bar{p}$ del CERN. Si tratta infatti di due macchine per certi aspetti complementari ai fini di una verifica della QCD: la prima produce qualsiasi "oggetto" elettricamente carico, la seconda qualsiasi "oggetto" colorato.

Ma accanto a questi "successi" della QCD si può certamente enumerare una lunga serie di problemi non risolti, sui quali non ci si è soffermati; è soprattutto motivo di insoddisfazione il non essere in grado di descrivere gli stati legati e le loro proprietà, sebbene si disponga *delle equazioni del moto della teoria*. Per trovare una analogia colla situazione attuale della QCD è parere di alcuni (vedasi per esempio H. David Politzer) che non si debba risalire agli inizi del secolo, quando la meccanica quantistica era in gestazione,

— come viene talvolta suggerito — quasi a sottolinerare il necessario travaglio che accompagna la nascita di una teoria. Allora, infatti, motivo di dibattito erano i sistemi complessi mentre i sistemi semplici erano capiti.

Oggi è già al livello dei sistemi semplici, quali gli stati legati di due o tre quark, che si incontrano delle grosse difficoltà, tuttora non risolte. In altre parole il confinamento è lungi dall'esser compreso. L'analogia — se la si vuole cercare — richiama piuttosto lo studio dei flussi turbolenti nella fluidodinamica (Navier (1822) Stokes (1845), Reynolds (1883), ...) le cui equazioni sono note dal secolo scorso, ma solo oggi, forse, cominciano ad essere aggredite nel modo corretto. Queste considerazioni inducono a guardare alla QCD col necessario criticismo. Dopotutto la QCD potrebbe non essere *la teoria* delle interazioni forti.

Democrito ricordava

ἁμαρτίης αἰτίη ἡ ἀμαθίη τοῦ κρέσσονος

(causa dell'errore è l'ignoranza del meglio).

Il problema della teoria delle interazioni forti potrebbe essere più complesso del previsto perché, come dice Goethe nel suo Faust,

> "Der kleine Gott... in jeden *Quark*
> begräbt er seine Nase".

BIBLIOGRAFIA

Parte I

M. Gellmann — Acta Physica Austriaca Suppl. IX, 733 (1972).

H. Fritzsch e M. Gellmann — Proceedings della XVI International Conference on High Energy Physics Chicago (1972). Vol. 2 p. 135 edito da J. D. Jackson e A. Roberts, Batavia, Acta Physica Austriaca - Suppl. XIX, 249 (1978).

H. Fritzsch — QCD-Theory of Hadrons in "Perspectives in modern Field Theories" - Stockholm - Settembre 1980 - MPI-PAE/PTh 49/80.

H. David Politzer — Physics Reports **14**, (1974) 129.

E. Reya — Perturbative QCD - Desy 79/80 DO 79/20 - Lectures held at the Herbstschul e für Hochenergie physik.

John Ellis e C. T. Sachrajda nei Proceedings della Scuola Estiva di Cargèse su Quark and Leptons (1979).

J. B. Bjorken – Elements of QCD SLAC-PUB-2372 (1979).

D. B. Lichtenberg – Quantum chromodynamics 26/80 Oxford University.

F. E. Close – The first Lap in QCD RL-80-063 Akaslömpolo, Artic School in Physics (1980).

F. E. Close – An introduction to quark and partons Academic Press 1979.

Parte II

II.1 J. D. Bjorken, S. D. Drell: Relativistic Quantum Mechanics Mc. GrawHill, Company.

G. Sterman and S. Weinberg – Phys. Rev. Lett. **39**, 1436 (1977).

Yu. L. Dokshitzer and D. I. Dyakonov – Quantum Chromodymanics and Hadron jets - DESY L - Trans 234 1979.

T. Kinoshita – J. Math. Phys. 3, 650 (1962).

T. O. Lee, M. Nauenberg – Phys. Rev. **133**, 1549 (1964).

II.2 K. Konishi – Status of (QCD based understanding) Jets XI Symposium on Multiparticle Dynamics - Brugge Belgium 1980 pg. 228.

K. Konishi – Delving into QCD jets - TH 2853 CERN.

P. Hoyer – Jet analysis - in XIX Cracow School of Theoretical Physics Zakopane (1979) Nordita 79/33.

H. David Politzer – Physica Scripta **23**, 1017 (1981).

K. Konishi, A. Ukawa, G. Veneziano – Phys. Lett **78B** (1979), 243; **80B** (1979) 259; Nuclear Physics **B157** (1979) 45.

G. Altarelli, G. Parisi – Nuclear Physics **B126** (1977) 298.

L. N. Lipatov – Yad. Fiz. **20** (1974) 81.

(°) A. Giovannini – Nuclear Physics **B161** (1979) 429.

(°) M. Anselmino, A. Giovannini, G. Vercellino – Il Nuovo Cimento A **62**, 253 (1981).

(°) A. Giovannini – "A stochastic approach to QCD jets" in Proceedings of the XI Symposium on Multiparticle Dynamics Brugge 1980, pg. 543.

B. R. Mandelbrot – "Fractals Form chance and dimensions - ed. W. H. Freeman and Company San Francisco.

G. Veneziano – in "Current problems in High Energy Physies" Firenze 1979.

(°) A. Giovannini – in "Proceedings of the X International Symposium on Multiparticle Dynamics - Goa 1979, pg. 364.

A. M. Polyakov – Sov. Phys. JEPT **33** (1971) 850.

S. J. Orfanidis and U. Rittenberg – Phys. Rev. **D10** (1974), 2892.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il Prof. V. de Alfaro per avermi invitato a parlare a questo incontro.

Colgo l'occasione per esprimere tutta la mia gratitudine al Prof. M. Verde, cui tanto deve la mia formazione; sono stati di prezioso aiuto nel preparare questa relazione numerose discussioni scientifiche col Prof. E. Predazzi e con i Drs. K. Konishi e G. Vercellino.

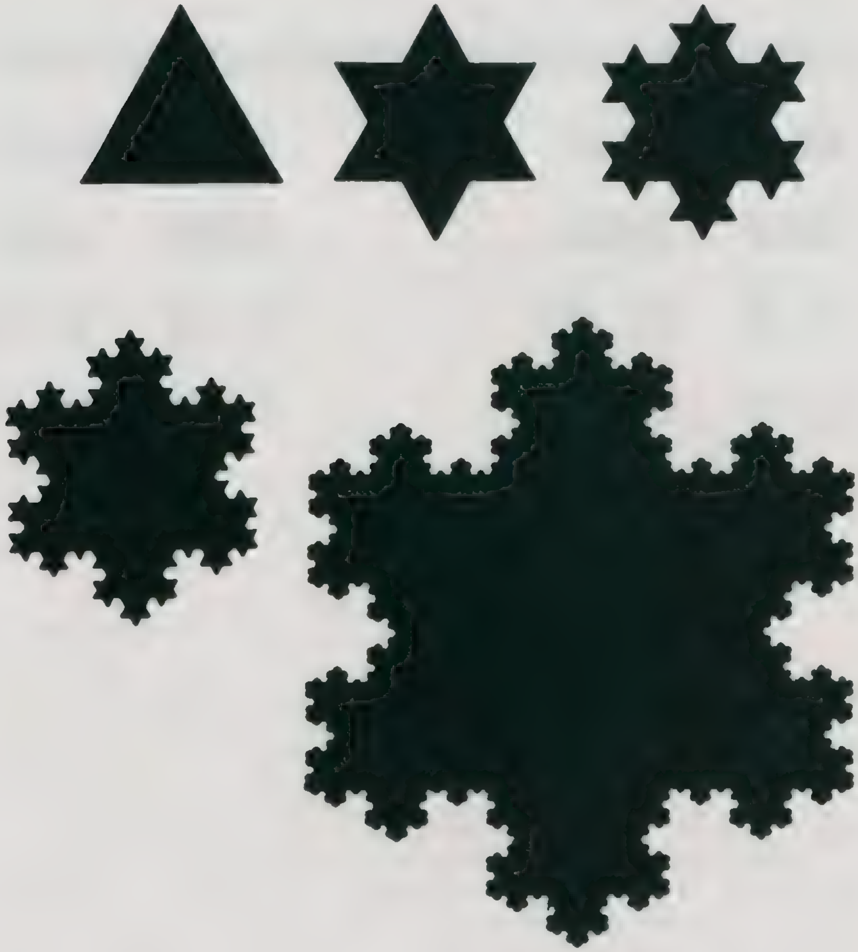


Figura 1 - Isola triadica di Koch (vedi Benoit B. Mandelbrot: Fractals - Ed. V. H. Freeman).
$D_H = \log N/\log(1/r) = \log 4/\log 3 = 1.286$.



Figura 2 - Insieme ternario di Cantor corrispondente a 2^m frammenti di lunghezza $L \cdot 3^{-m}$ ciascuno; m è il numero di generazioni. Moto vorticoso. $D_H = \log 2/\log 3 = 0.6309$.

A New Approximation for the Coulomb Coupled Channel Problem Involving Heavy Ions

K. Alder, F. Roesel* - J. X. Saladin***

A Mario Verde per il suo sessantesimo compleanno e a ricordo dei suoi anni di insegnamento a Zurigo e a Basilea.

Abstract:

The Coulomb excitation process is described as a set of coupled first order differential equations. For the heavy ion case an approximation based on the Magnus expansion is introduced leading to correction terms to the usual WKB description.

1. Introduction

With the advent of a new generation of heavy ion accelerators, it has recently become possible to Coulomb-excite rotational actinide nuclei up to the 30^+ state[1]. Traditionally, such experiments are analyzed using the semiclassical theory of Coulomb excitation[2,3]. It is, however, well know that the significance of quantum mechanical effects increases with the multiplicity of the excitation[2]. However, due to the large number of couplings it is at present not possible or practical to evaluate heavy ion experiments with any of the existing standard quantum mechanical coupled channel codes. An intermediate approach between the semiclassical and quantum mechanical treatment is the WKB limit[4], which offers a way of bringing contact between the semiclassical and quantum mechanical theory.

However, it is quite difficult to estimate analytically the accuracy of the WKB approximation as well as of the semiclassical treatment. Generally, one would expect both methods to deviate frome the

* University of Basel, Institut für Physik, Klingelbergstr. 82 - CH-4056 Basel.

** University of Pittsburgh, Dep. of Nuclear Physics - Pittsburgh, PA. 15213.

exact

exact calculation by times of the order $1/\eta$. In this paper we present an approximation which is based on the Magnus[5,6] expansion and which leads to correction terms to the WKB or the semiclassical limits.

2. Theory

In the quantum mechanical theory the scattering wave function can be described by radial wave functions which obey a set of second order differential equation of the form[2]

$$\frac{d^2}{dr^2} + K_I^2 - \frac{2\,\eta_I K_I}{r} - \frac{l\,(l+1)}{r^2} \quad g_{(lI)J}\,(r) = \\ = \sum_{l'I'} V_{lI,l'I'}\,(r)\, g_{(lI)J}\,(r), \tag{1}$$

where the quantum numbers $(lI)J$ denote the relative angular momentum l, the nuclear state I and the total conserved angular momentun $\vec{J}=\vec{l}+\vec{I}$. The coupling potential is given in terms of the reduced matrix elements $\langle I' \| U(E\lambda) \| I \rangle$ of the electric multipole operator of the order λ by

$$V_{lI,l'I'}\,(r) = \frac{4\sqrt{\pi}\, Z_p\, lm}{\hbar^2} \sum_{\lambda} (-)^{J+I'+\lambda} \left(\frac{(2l+1)\,(2l'+1)}{(2\lambda+1)} \right)^{1/2} \cdot \\ \cdot \langle I' \| U(E\lambda) \| I \rangle \begin{pmatrix} l & l' & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J & l & I \\ \lambda & I' & l' \end{Bmatrix} \frac{1}{r^{\lambda+1}} \tag{2}$$

The quantities K_I and η_I represent the wave number and Coulomb parameter after excitation into a state of spin I. The scattering solution to equation (1) is regular at the origin and asymptotically it behaves as

$$g_{(lI)J}\,(r) = \left(\frac{K_{I_0}}{K_I} \right)^{1/2} \{ \delta_{ll_0}\ \delta_{II_0}\ h^-_{lI}\,(r) - \\ - r_{lI,l_0I_0}\ h^+_{lI}\,(r) \} \tag{3}$$

according to the fact that there are only incident waves in the initial channel $(l_0 I_0)$ and outgoing waves in all other channels. The ingoing

and outgoing Coulomb waves $\bar{b}_{lI}$ and $\overset{+}{b}_{lI}$, respectively, are defined by

$$\overset{\pm}{b}_{lI}(r) = G_l(K_I r) \pm i\, F_l(K_I r), \tag{4}$$

where F_l and G_l are the well known regular and irregular Coulomb wave functions. The quantities r^J_{lI,l_0I_0} represent the S-matrix elements up to a phase from which the cross section and excitation amplitudes can be obtained.

The radial wave functions $g_{(lI)J}(r)$ are now decomposed into amplitudes $\bar{a}_{(lI)J}$ and $\overset{+}{a}_{(lI)J}$ according to

$$g_i(r) = \frac{k_{i_0}}{k_i}^{1/2} (a_i^-(r)\, b_i^-(r) - a_i^+(r)\, b_i^+(r)) \tag{5}$$

where we have replaced the quantum numbers (ℓI)J by the single index i. Using the vector notation $(A^-)^T = (a_1^-, a_2^- ...)$ and $(A^+)^T = (a_1^+, a_2^+ ...)$ it is possible to write the differential equation (1) in matrix form'

$$\frac{d}{dr} A^-(r) = V_1(r)\, A^-(r) + V_2(r)\, A^+(r) \tag{6a}$$

and

$$\frac{d}{dr} A^+(r) = V_1^*(r)\, A^+(r) + V_2^*(r)\, A^-(r) \tag{6b}$$

The matrix elements of $V_1(r)$ are given by

$$(V_1)_{ij} = -\frac{1}{2i} \frac{V_{ij}(r)}{\sqrt{k_i k_j}} b_i^+(r)\, b_j^-(r) \tag{7a}$$

and are slowly oscillating functions of r, whereas the elements of $V_2(r)$

$$(V_2)_{ij} = \frac{i}{2i} \frac{V_{ij}(r)}{\sqrt{k_i k_j}} b_i^+(r)\, b_j^+(r) \tag{7b}$$

are rapidly oscillating functions of r. A formal solution of the differential equation (6) can now be obtained with the help of the Magnus expansion[5,6] by

$$\begin{pmatrix} A^-(r) \\ A^+(r) \end{pmatrix} = \exp\left\{ \int_{r_0}^{r} V(r)\,dr - \frac{1}{2}\int_{r_0}^{r} dr_1 \int_{r_1}^{r} dr_2 \cdot \cdot\, [V(r_1), V(r_2)] + \dots \right\} \begin{pmatrix} A^-(r_0) \\ A^+(r_0) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

where we have introduced the composite matrix $V(r)$ by

$$V(r) = \begin{pmatrix} V_1(r) & V_2(r) \\ V_2^*(r) & V_1^*(r) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Considering only the first order Magnus term and neglecting the fast oscillating potential $V_2(r)$ the two amplitudes $A^-$and A^+ become uncoupled and are then given in differential form as

$$\frac{d}{dr} A^-(r) = V_1(r)\, A^-(r), \tag{10a}$$

and

$$\frac{d}{dr} A^+(r) = V_1^*(r)\, A^+(r). \tag{10b}$$

Following the usual WKB procedure, we introduce the approximate wave functions

$$b_i^\pm(r) = \left(\frac{k_i^2}{f_i(r)}\right)^{1/4} \exp\{\pm i\, \varphi_i(r)\} \tag{11}$$

with

$$\varphi_i(r) = {}^{\pi}/_{4} + \int_{r_i}^{r} (f_i(r))^{1/2}\, dr \tag{12}$$

and

$$f_i(r) = k_i^2 - \frac{2\,\eta_i\, k_i}{r} - \frac{l_i(l_i+1)}{r^2}, \tag{13}$$

where the expression (11) holds outside the classical turning point r_i, defined by $f(r_i)=0$. Inserting eq. (11) into the differential equation (10) it is easy to see that we arrive at the WKB equations for the amplitude

$$\frac{d}{d\omega} a_i(\omega) = -i \sum_{j\lambda} \chi_{ij}^{(\lambda)} W_{ij}^{(\lambda)} \exp i \{(\eta_i - \eta_i)(\epsilon_{ij} \sinh \omega + \omega)\} \cdot \cdot \frac{(\cosh \omega + \epsilon_{ij} + i\sqrt{\epsilon_{ij}^2 - 1} \sinh \omega)^{l_i - l_j}}{(\epsilon_{ij} \cosh \omega + 1)^{\lambda + l_i - l_j}} a_j(\omega) = \sum_j V_{ij}^{\mathrm{WKB}}(\omega)\, a_j(\omega) . \tag{14}$$

We have introduced for convenience the coupling strength parameter $\chi_{ij}^{(\lambda)}$ by

$$\chi_{ij}^{(\lambda)} = \frac{4\sqrt{\pi}\,(\lambda-1)!\, Z_p l \langle I_i \| U(E\lambda) \| I_f \rangle}{(2\lambda+1)!!\, b\, v_{ij}\, a_{ij}^{\lambda}} \tag{15}$$

where the quantities v_{ij} and a_{ij} are the symmetrized expressions for the velocity and for half the distance of closest approach, respectively. The geometrical factor $W_{ij}^{(\lambda)}$ appearing in eq. (14) is defined as

$$W^{(\lambda)} = \frac{(2\lambda+1)!!}{(\lambda-1)!} \left(\frac{(2l_i+1)(2l_j+1)}{(2\lambda+1)} \right)^{1/2} \cdot \cdot (-)^{J+I_j+\lambda} \begin{pmatrix} l_i & l_j & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J & l_i & I_i \\ \lambda & I_j & l_j \end{Bmatrix} . \tag{16}$$

In the derivation of eq. (14) we have assumed that the projectile is moving on a hyperbolic orbit characterized by

$$r = a_{ij}(\epsilon_{ij} \cosh \omega + 1) \tag{17}$$

with

$$\epsilon_{ij} = \left(1 + 2\, \frac{(l_i + {}^1/_2)(l_j + {}^1/_2)}{\eta_i + \eta_j} \right)^{1/2} \tag{18}$$

From the asymptotic condition (3) and the definition (5) it follows that the initial condition

$$a_i(-\infty) = \delta_{ii_0} \tag{19}$$

holds and that the quantity r_{ii_0} is given by

$$a_i(\infty) = r_{ii_0} . \tag{20}$$

The above approximation can be improved by considering the second term in eq. (8). It is expected that this second order Magnus term receives contributions only from the region near the classical turning point since the integrand is rapidly varying as a function of r. Neglecting again the off diagonal part of the commutator $[V(r_1), V(r_2)]$ che double integrals appearing in eq. (8) are of the form

$$I_{ij}^{\pm}=\frac{1}{2}\sum_K\int_{r_0}^{r} dr_1\ (V_1(r_1))_{iK}\exp\pm(2i\varphi_K(r_1))\cdot \cdot\int_{r_1}^{r} dr_2\ \widetilde{W}_{Kj}(r_2)\frac{\exp\mp(2i\varphi_K(r_2))}{(f_K(r_2))^{1/4}}\ . \tag{21}$$

with

$$\widetilde{W}_{Kj}(r_2)=\frac{1}{2i}(V_1(r_2))_{Kj}\ \frac{\exp\pm i(\varphi_K(r_2)-\varphi_j(r_2))}{(f_K(r_2))^{1/4}}\ . \tag{22}$$

The second integral in eq. (21) receives contribution only from the region of the classical turning point where the integral can be evaluated in an approximate fashion, Assuming that the function $W_{Kj}(r_2)$ is approximatively constant, the integral can be evaluated by part leading to the final expression

$$I_{ij}^{\pm}\cong\mp\frac{1}{4i}\sum_K\int_{r_0}^{r} dr_1\ (V_1(r_1))_{iK}(V_1(r_1))_{Kj}\left(\frac{1}{f_K(r_1)}\right)^{1/4}\cdot \cdot\{1-U(1,1/2,\mp 2i\varphi_K(r_1)\}\ , \tag{23}$$

where $U(a,\ b,\ z)$ is the Kummer function[7]. Inserting eq. (23) together with eqs. (17) and (18) into the Magnus solution, the corresponding differential equation can be written in the WKB form as

$$\frac{d}{d\omega}a_i(\omega)=\sum_j V_{ij}^{\mathrm{WKB}}(\omega)\,a_j(\omega)- -\frac{1}{2i}\sum_{jK} V_{iK}^{\mathrm{WKB}}(\omega)\,V_{Kj}^{\mathrm{WKB}}(\omega)\,c(\varphi_K)\,a_j(\omega)\ . \tag{24}$$

We have introduced the function $c(\varphi_K)$ by

$$c(\varphi_K)=Re\,\{(2i\varphi_K)^{1/2}\exp(2i\varphi_K)\,\Gamma(1/2,2i\varphi_K)\}\cdot \\ \cdot\left(\frac{\epsilon_{KK}\cosh\omega+1}{\epsilon_{KK}^3\,\eta_K^2\,\sinh\omega^3}\right)^{1/2}, \tag{25}$$

where $\Gamma(a,z)$ is the incomplete gamma function[7] and φ_K is defined by

$$\varphi_K=\eta_K\,\epsilon_{KK}\sinh\omega-\eta_K\,\omega+(\epsilon_{KK}^2-1)^{1/2}\cdot \\ \cdot\,\mathrm{arcos}\left(\frac{\epsilon_{KK}+\cosh\omega}{1+\epsilon_{KK}\cosh\omega}\right). \tag{26}$$

The second term in eq. (24) which is a correction term to the usual WKB solution has just the structure as expected from the quantum mechanical treatment: in the limit η and $l \gg 0$ where the WKB amplitude $a_i(\omega)$ approaches the quantum mechanical result the coefficient $c(\varphi_K)$ venishes. For finite values of η and l the contribution of the second term in eq. (24) to the amplitude a_i is only important in the region of the classical turning point (i.e. $\omega=0$) where the function $c(\varphi_K)$ behaves as

$$c(\varphi_K)\cong\frac{1}{\sqrt{\eta_K}}\,\frac{\sqrt{\epsilon_{KK}+1}}{\epsilon_{KK}}\;. \tag{27}$$

In the asymptotic region $c(\varphi_K)$ vanishes as

$$c(\varphi_K)\cong\frac{1}{\eta_K\,\epsilon_{KK}\sinh\omega} \tag{28}$$

with the order $1/\eta$.

3. Results

The method has been subjected to preliminary tests, where we have performed a calculation for a model of rotational nuclei assuming an even-even nucleus with corresponding spin sequences and E2-moments. Under these conditions there remain only three free parameters, namely the coupling strength between the ground state and the first excited state $\chi^{(2)}_{0^+2^+}$, the parameters η_{0^+} and $\xi_{0^+2^+} = \eta_{2^+}-\eta_{0^+}$. In Fig. 1 we show the modulus of quantity $r^J_{Il,l_0 I_0}$ for

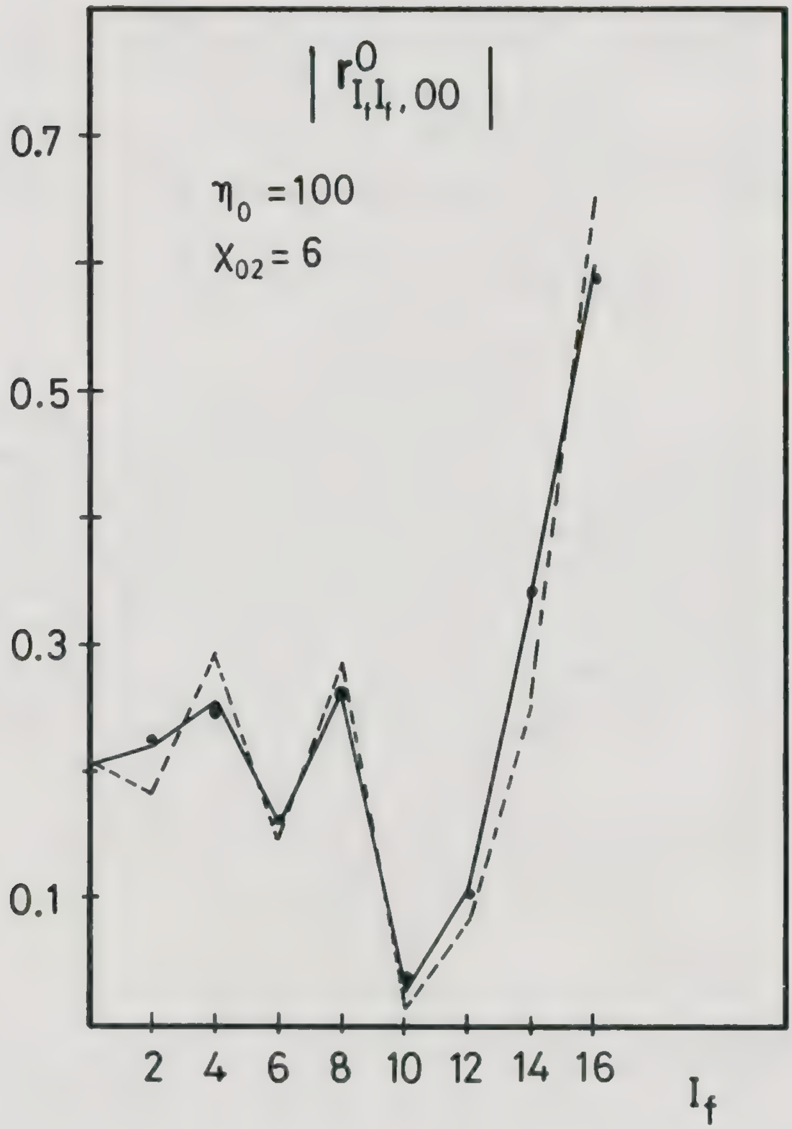


Figure 1 – The modulus of the quantity r_{II,I_0I_0} is shown for channel-spin $J=0$ as a function of the nuclear spin state I_f. The full line represents the exact quantum mechanical results and the dashed line the WKB results (eq. (14)). The results of the WKB calculation with the correction term (eq. (24)) are displayed as points.

$J=0$ up to a nuclear spin state $I=16^+$, where we have chosen $\eta_{0^+}=$ $=100$, $\xi_{0^+2^+}=0$ and $\chi_{0^+2^+}=6$. The quantum mechanical results are shown by the full line, the WKB results (eq. (14)) by the dashed line and the WKB calculation with the correction term (eq. (24)) is displayed as points. It is seen that the deviations of the WKB calculation from the exact results are of the order of up to 20% whereas the results of the new approximation agree within a few percents with the exact calculation.

Further numerical tests will be performed to check the accuracy of the new WKB equations.

Ringraziamo cordialmente Mario Verde, la sua famiglia e i suoi colleghi di Torino per la riuscita organizzazione del congresso, così pure per la gentile ospitalità e l'amichevole compagnia.

REFERENCES

(1) G. Schwalm, GSI-preprint 80-26 (1980).

(2) K. Alder and A. Winther, Electromagnetic Excitation (North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1975).

(3) A. Winther and J. de Boer, 1965, A Computer Program for Multiple Coulomb Excitation; California Institute of Technology, Technical Report; reprinted in K. Alder and A. Winther, Coulomb Excitation (Academic Press, N.Y., 1966).

(4) H. K. Pauli and K. Alder, Nucl. Phys. **A218** (1969) 193.

(5) W. Magnus, Comm. Pure Appl. Math. **7** (1954) 649.

(6) P. Pechukas and J. C. Chem. Phys. **44** (1966) 3897.

(7) M. Abramowitz and I. A. Stegun, eds., 1964, Handbook of Mathematical Functions (National Bureau of Standards, Washington D.C.).

Entropia e stati stazionari

Ferdinando D'Isep e Luigi Sertorio *

Und dem Heitren erscheint die Welt auch heiter
Goethe, Epistola 1,20.

1.

Nello studio dei sistemi complessi compare il concetto di evoluzione il quale contiene qualcosa di nuovo rispetto al concetto di dipendenza dal tempo della soluzione di un problema hamiltoniano. Il primo passo di allontanamento dal linguaggio hamiltoniano consiste nell'introdurre grandezze ottenute mediante delle medie; percorrendo questa strada e perfezionando con molte ipotesi la definizione di media si giunge alla fine a formulare la meccanica statistica.

Le grandezze che nascono dal fare delle medie sono la temperatura, la densità e la pressione (temperatura, magnetizzazione e campo H per i sistemi magnetici) e funzioni di esse. La termodinamica è una descrizione altamente idealizzata: è lo stadio finale dell'evoluzione in cui più nulla si evolve e il tempo non compare più. Dovrebbe stupire che il limite descritto dalla termodinamica esista e sia approssimativamente realizzato in Natura; questa non è solamente una curiosità ergodica: la stabilità termodinamica della materia è un problema aperto e importante.

Per quanto riguarda l'evoluzione notiamo che in cosmologia, in fisica del plasma, in fisica planetaria compaiono tipiche situazioni che non sono sensatamente né hamiltoniane né puramente termodinamiche, ma in qualche modo evolutive. Fissiamo subito le idee dicendo che d'ora in poi con evolutivo intendiamo quello che si può descrivere matematicamente con equazioni di campo di tipo fluidodinamico. Questa è una scelta poiché a priori uno potrebbe partire molto più a monte. Ma la fluidodinamica è già interessante, difficile e ricca di sorprese per quella che è.

---

* Istituto di Fisica dell'Università di Torino
INFN, Sezione di Torino
Scuola di Specializzazione in Fisica Nucleare, Università di Torino

Le equazioni differenziali della fluidodinamica si possono derivare semplicemente assumendo che esse esprimono il più vicino discostamento della termodinamica, cioè dalla stasi che si trova al termine dell'evoluzione. Infatti dividiamo lo spazio in volumi $d^3\bar{r}$ entro cui supponiamo di poter definire $\rho(\bar{r}, t)$, $T(\bar{r}, t)$ e $\bar{v}(\bar{r}, t)$. $\bar{v}$ è la velocità media locale collettiva corrispondente al $d^3\bar{r}$; le velocità corrispondenti ai moti caotici hanno risultante nulla mentre le loro energie cinetiche mediate danno $kT(\bar{r}, t)$. Le equazioni della fluidodinamica esprimono localmente la conservazione della massa, la conservazione dell'impulso e la conservazione dell'energia, sotto forma di equazioni di continuità.

L'equazione di continuità per la massa è la più semplice:

$$\frac{\partial \rho(\bar{r}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \bar{v}). \tag{1.1}$$

Le dimensioni sono kg/m^{3}s. L'equazione di continuità per l'impulso è la seguente:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} \tag{1.2}$$

dove Π_{ik} si chiama tensore densità di flusso di momento e si esprime come

$$\Pi_{ik} = p\,\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} \tag{1.3}$$

$p(\bar{r}, t)$ è la pressione, δ_{ik} è la delta di Kronecker, σ'_{ik} è il tensore degli stiramenti dato da:

$$\sigma'_{ik} = \eta \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right] + \xi\,\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \tag{1.4}$$

Le dimensioni sono Forza/m^2. Si è usata la convenzione di somma sugli indici ripetuti. σ'_{ik} è un tensore simmetrico e così anche Π_{ik}.

Infine l'equazione di continuità per l'energia è

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right) = - \operatorname{div}\left[\bar{v}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right) + \bar{v}p - (v\sigma') - x\nabla T\right] \tag{1.5}$$

Le dimensioni sono W/m^3; ϵ è la densità di energia interna e $\varkappa$ è la costante di Fourier.

Le equazioni (1.2) e (1.5) necessitano di qualche spiegazione. Dalla (1.3) vediamo che le dimensioni di Π_{ik} sono Forza/m^2; la densità di momento in $d^3\overline{r}$ varia per effetto della pressione esercitata sulle pareti di $d^3\overline{r}$, per effetto dei gradienti di velocità (il termine cinematico $\rho v_i v_k$) e per effetto delle forze di sfregamento espresso dal tensore σ'_{ik}. Questo tensore ci dice che scorrimenti relativi di velocità sono permessi solo a spese di impulso, cioè molecole contigue vengono eccitate da una variazione di moto collettivo e si diseccitano con rilascio di moti termici.

L'equazione (1.2) esplicitando la derivata al primo membro mediante la relazione (1.1), diventa immediatamente l'equazione di Navier-Stokes. Si ottiene infatti:

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{v}\cdot\nabla\right)v_i=-(\nabla p)_i-\frac{\partial}{\partial x_k}\sigma'_{ik} \qquad i,k=1,2,3 \tag{1.6}$$

e si vede così che il termine $\frac{\partial}{\partial x_k}[\rho v_i v_k]$ ha prodotto $\rho(\overline{v}\cdot\nabla)v_i$. L'operatore

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\overline{v}\cdot\nabla$$

viene talora chiamato derivata baricentrica o derivata essenziale.

Per quanto riguarda l'equazione di continuità per l'energia, abbiamo individuato con il binomio

$$e=\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon \tag{1.7}$$

la densità totale di energia, somma di energia interna più cinetica collettiva; e non c'è altro.

I flussi di densità di potenza sulle pareti di $d^3\overline{r}$ sono, in aggiunta a $\overline{v}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon\right)$, la potenza della pressione, $\overline{v}p$, la potenza degli attriti cioè il vettore di componenti $v_i\sigma'_{ik}$, e il vettore conduzione di calore di componenti $-\varkappa\,\partial T/\partial x_i$. Non ci sono altri flussi di potenza all'interno di un fluido omogeneo.

Le precedenti equazioni (1.1), (1.2) e (1.5), se è nota l'equazione

di stato

$$p = p(\rho, T) \tag{1.8}$$

e con opportune condizioni al contorno, permettono di determinare i campi scalari $\rho(\bar{r}, t)$ e $T(\bar{r}, t)$ e il campo vettoriale $\bar{v}(\bar{r}, t)$.

La semplicità formale delle precedenti equazioni è alterata da tre categorie di estensioni:

i) il sistema fluidodinamico non è isolato: ci sono campi esterni,
ii) il sistema non è omogeneo perché ammette transizioni di fase,[1]
iii) il sistema è sede di reazioni chimiche o nucleari.[2]

Discutiamo qui il primo punto limitatamente al caso di campo esterno gravitazionale. La presenza di un campo esterno non modifica l'equazione di continuità per la massa, ma altera le equazioni per l'impulso e per l'energia introducendo in esse un termine additivo di sorgente per cui non sono più equazioni di continuità. Chiamiamo $\phi(r)$ il potenziale del campo esterno. L'equazione (1.2) diventa

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \tag{1.9}$$

Il termine $-\rho\, \partial\phi/\partial x_i$ è un termine di volume. Il sistema fluidodinamico non è più isolato e riceve impulso dal campo esterno. Se avessimo trattato fluidodinamicamente la sorgente del campo esterno il sistema globale sarebbe a sua volta isolato. Chiaramente il problema è di definire in maniera conveniente ciò che è il sistema e ciò che non lo è. Questa osservazione induce a chiedersi quale è il sistema di riferimento giusto per la fluidodinamica. Ne parleremo dopo aver discusso l'equazione per l'energia.

In presenza di un campo esterno l'equazione (1.5) diventa

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right) = - \\ - \operatorname{div}\left[\bar{v}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right) + \bar{v}p - (\bar{v}\sigma') - x\nabla T\right] - \\ - \rho\bar{v}\cdot\nabla\phi \tag{1.10}$$

Il campo esterno compare come una sorgente di energia. Osserviamo che è possibile formalmente manipolare la (1.9) rendendola di nuovo un'equazione di continuità; basta infatti considerare come densità di

energia il trinomio

$$e = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon + \rho\phi$$

col che si ottiene subito (usando la (1.1)):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon + \rho\phi\right) = - \tag{1.11}$$

$$- \operatorname{div}\left[\bar{v}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon + \rho\phi\right) + \bar{v}p - (\bar{v}\,\sigma') - x\nabla T\right].$$

Le due equazioni (1.10) e (1.11) sono equivalenti. Noi però consideriamo come "giusta" l'equazione (1.10) ovvero la definizione (1.7) che fa entrare in gioco solo l'energia dei moti termici e dei moti collettivi.

Associata all'equazione dell'energia (1.10) abbiamo l'equazione differenziale dell'entropia. Questa equazione si ottiene eseguendo le derivate al primo membro della (1.10), usando l'equazione della massa (1.1) e dell'impulso (1.9), la relazione termodinamica

$$d\epsilon = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho , \tag{1.12}$$

e l'identità

$$v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(v_i \sigma'_{ik}) - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{1.13}$$

Si ottiene così:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right) = -$$

$$- \operatorname{div}\left[\bar{v}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right) + \bar{v}p - (v\,\sigma') - x\nabla T\right] \tag{1.14}$$

$$-\rho\bar{v}\nabla\phi + \rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \bar{v}\nabla s\right) - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \operatorname{div}(x\nabla T).$$

In virtù della (1.10) si ottiene:

$$\rho\frac{\partial s}{\partial t} + \bar{v}\rho\nabla s = \frac{1}{T}\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{T}\operatorname{div}(x\nabla T). \tag{1.15}$$

Cerchiamo un'equazione che sia il più possibile vicino ad un'equazione di continuità per la densità d'entropia ρs. Essa è

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) = -\operatorname{div}\left(\bar{v}\rho s - x\frac{\nabla T}{T}\right) + x\frac{(\nabla T)^2}{T^2} + \frac{1}{T}\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{1.16}$$

La (1.16) si ottiene dalla (1.15) facendo uso della (1.1) e dell'identità

$$\frac{1}{T}\operatorname{div}(x\nabla T) = \operatorname{div}\left(\frac{x\nabla T}{T}\right) + x\frac{(\nabla T)^2}{T^2}. \tag{1.17}$$

Vediamo che in generale l'equazione dell'entropia non è un'equazione di continuità perché ci sono i termini di sorgente $x(\nabla T)^2/T^2$ e $\sigma'_{ik}\,[\partial v_i/\partial x_k]/T$. Essendo i coefficienti x, η e ξ (vedi formula (1.4) e (1.5) positivi, si vede che i termini di sorgente sono positivi cioè sono termini di accrescimento.

2.

Abbiamo detto che la fluidodinamica è costruita come discostamento della termodinamica. Mostriamo che, consistentemente, il limite termodinamico è raggiunto come andamento asintotico. A questo scopo integriamo l'equazione dell'entropia su un volume V avente superficie S.

$$\dot{\mathscr{S}} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho s\, dV = -\int_S \left(\bar{v}\rho s - x\frac{\nabla T}{T}\right)\cdot \bar{n}\, dS + \int_V x\frac{(\nabla T)^2}{T^2}\, dV + \int_V \frac{1}{T}\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\, dV \tag{2.1}$$

Otteniamo la disuguaglianza $\dot{\mathscr{S}} > 0$ se ∇T e $\rho\bar{v}$ tendono a zero in modo da annullare gli integrali di superficie; gli integrali di volume sono sempre positivi. In tal caso lo stato stazionario, definito da $\dot{\mathscr{S}} = 0$, si raggiunge quando per effetto degli attriti e della conduzione termica l'evoluzione porta ad avere

$$T = 0 \qquad \text{dovunque}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = 0 \qquad \text{dovunque}$$

In altre parole lo stato termodinamico è caratterizzato da

$$\begin{aligned} T(\overline{r}, t) &= T_0 \\ \overline{v}(\overline{r}, t) &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Si può giungere allo stesso risultato (2.2) considerando un sistema finito racchiuso in pareti rigide e adiabatiche. Infatti in questo caso la (2.1) si riduce a

$$\dot{\mathscr{S}} = \int_V \frac{(\nabla T)^2}{T^2}\, dV + \int_V \frac{1}{T}\, \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\, dV \tag{2.3}$$

poiché per definizione su una parete rigida e adiabatica $\overline{v} \cdot \overline{n} = 0$ e $\nabla T \cdot \overline{n} = 0$.

Osserviamo che il campo esterno non compare nell'equazione dell'entropia. Pertanto la rimanente funzione incognita $\rho(\overline{r})$ verrà determinata dalle equazioni statiche

$$\begin{aligned} \nabla p &= -\rho \nabla \phi \\ p &= p(\rho, T_0). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ad esempio per il gas ideale in campo esterno costante $\overline{g} = g\overline{k}$ ($\overline{k}$ versore asse z) si ha la nota soluzione del sistema (2.4):

$$\rho = \rho_0 \exp(-gz/kT_0). \tag{2.5}$$

In quale sistema di riferimento si fa la fluidodinamica? Se le condizioni al contorno sono tali da dare il limite termodinamico si sceglie come sistema di riferimento quello termodinamico, che è quello in cui:[3]

$$\overline{P}^{\text{tot}}_{\text{fluido}} = 0.$$

La presenza di un campo esterno fa si che il riferimento in cui $\overline{P}^{\text{tot}}_{\text{fluido}} = 0$, che è il sistema del baricentro, non è più in generale un sistema inerziale. E' anche vero che per esempio una distribuzione di $\rho(\overline{r})$ come data dalla (2.5) non è in un senso rigoroso "termodinamica". Non ci sembra però importante insistere su questa distinzione. In generale se il sistema fluido occupa tutto lo spazio si usa come riferimento quello in cui il campo $\overline{v}$ è nullo all'infinito.

3.

Una classe importante di problemi è quella che tratta i sistemi confinati naturalmente cioè senza pareti rigide adiabatiche. Ciò che confina sarà o il campo esterno o un campo interno con forze a lungo range, il tutto in combinazione con le forze fluidodinamiche p e σ'_{ik}. Abbiamo parlato di campo esterno, descriviamo ora quello interno. Per fissare le idee consideriamo quello di gravità. Ci sarebbe anche come candidato il campo elettromagnetico; quello nucleare è a corto range e lo consideriamo solo come eventuale termine di sorgente termonucleare. Il potenziale Ψ del campo di gravità è dato da

$$\Psi(\bar{r},t)=\gamma\int_V \frac{d^3\bar{r}'\,\rho(\bar{r}',t)}{|\bar{r}'-\bar{r}|} \tag{3.1}$$

Per quanto riguarda il termine di sorgente esso potrà essere semplicemente

$$\xi\equiv \operatorname{div}\bar{q}_{\text{nucl}}=\lambda(T_\xi-T(\bar{r},t)). \tag{3.2}$$

In generale però λ e T_ξ dipendono in modo complicato da densità, temperatura, concentrazione del combustibile ecc.. In presenza del campo interno Ψ le equazioni dell'impulso e dell'energia sono:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)=-\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}-\rho\frac{\partial\Psi}{\partial x_i} \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon\right)=-\operatorname{div}\left[\bar{v}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon\right)+\bar{v}p-(\bar{v}\sigma')-x\nabla T\right]-$$
$$-\rho\bar{v}\cdot\nabla\Psi\ . \tag{3.4}$$

E' opportuno definire il confinamento del sistema fluidodinamico mediante la conservazione della massa; si richiede che esista un volume V indipendente dal tempo per cui si abbia

$$\int_V \rho(\bar{r},t)\,dV=\mathcal{M}. \tag{3.5}$$

Integrando l'equazione del moto (3.3) si ottiene

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)\,dV=\int_S \Pi_{ik}\,dS_k-\int_V \rho\,\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}\,dV. \tag{3.6}$$

Poiché la (3.1) descrive un campo interno l'impulso totale del sistema fluidodinamico deve conservarsi per cui scriviamo

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho v_i \, dV = 0. \tag{3.7}$$

La (3.7) esprime la conservazione dell'impulso per un sistema isolato; l'equazione (3.6) diventa:

$$\int_S \Pi_{ik}\, dS_k - \int_V \rho \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} dV = 0. \tag{3.8}$$

Inserendo la (3.1) nel secondo integrale della (3.8) si ottiene che

$$\int_V \rho \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} dV = 0. \tag{3.9}$$

Per un sistema spazialmente isolato si ha quindi che:

$$\int_S \Pi_{ik}\, dS_k = 0. \tag{3.10}$$

E' ovvio che per un sistema confinato dal campo interno il sistema di riferimento "giusto" è quello tale che

$$\int_V \rho \bar{v}\, dV = 0. \tag{3.11}$$

Per di più il sistema del baricentro è anche inerziale.

Vediamo ora cosa succede con il campo esterno ϕ. Innanzitutto pr un campo esterno in generale la (3.9) non è più vera. Un caso interessante per illustrare la (3.9) è quello dell'atmosfera di un pianeta sferico. Il campo ϕ è dato da

$$\phi = \gamma \frac{M}{r} \qquad r > R \tag{3.12}$$

dove M è la massa totale della parte rigida del pianeta e R è il raggio. In questo caso prendiamo come sistema di riferimento una terna solidale con la sfera, centrata nell'origine. L'integrale (3.9) in generale non è nullo, anche se lo è certamente in simmetria sferica. A questo punto per dire qualcosa di più è necessario risolvere l'equazione di Navier-Stokes. Per far ciò è necessario considerare anche l'equazione della energia.

4.

Per quanto riguarda la densità di impulso, nel caso di confinamento, l'equazione che esprime il bilancio è la (3.10). Vediamo ora cosa succede per l'energia e l'entropia.

L'equazione differenziale dell'energia, in presenza di sorgente, è:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right) = -\operatorname{div}\left[\bar{v}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right) + \bar{v}p - \bar{v}\sigma' - x\nabla T\right] - \\ - \rho\bar{v}\nabla\Psi + \xi \tag{4.1}$$

ed il bilancio risulta

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right) dV = - \tag{4.2}$$

$$- \int_S \left[\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right)\bar{v} + \bar{v}p - \bar{v}\sigma'\right] \cdot \bar{n}\, dS +$$

$$+ \int_S x\nabla T \cdot \bar{n}\, dS - \int_V \rho\nabla\Psi \cdot \bar{v}\, dV + \int_V \xi\, dV.$$

La condizione (3.5) implica l'annullarsi di $\rho\bar{v}\cdot\bar{n}$ sulla superficie S. Pertanto la condizione (3.10) ci dice che

$$\int_S \sigma'_{ik}\, dS_k = 0. \tag{4.3}$$

Consideriamo ora la (4.2); l'equazione

$$\int_S \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + \epsilon\right)\rho\bar{v} + \rho kT\bar{v}\right] \cdot \bar{n}\, dS = 0 \tag{4.4}$$

deve essere valida come conseguenza dell'assenza di fuga di massa; questo è implicito nella (3.5). Deve valere anche

$$\int_S (\bar{v}\sigma') \cdot \bar{n}\, dS = 0. \tag{4.5}$$

Le equazioni (4.3) e (4.3) sono consistenti nel senso che, quando il flusso di forza σ'_{ik} ha integrale nullo sulla superficie S, anche il corrispondente flusso di potenza $(\bar{v}\sigma')$ ha integrale nullo sulla superficie S.

Ponendo ora con ovvia notazione

$$\dot{E} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) dV \tag{4.6}$$

e facendo uso delle (4.4) e (4.5), che esprimono, per così dire, un confinamento cinematico, il bilancio energetico diventa:

$$\dot{E} = \int_S x \nabla T \cdot \overline{n}\, dS - \int_V \rho \nabla \Psi \cdot \overline{v}\, dV + \int_S \xi\, dV. \tag{4.7}$$

In generale $\dot{E} = \dot{E}(t)$ può essere positiva o negativa. $E = E(t)$ è sempre positiva per definizione. E' lecito chiederci cosa può succedere alla funzione positiva $E(t)$ ricordandoci che rappresenta il bilancio. Essa può tendere a zero; questo significa che il sistema svanisce. $E(t)$ può tendere ad infinito; ciò significa che c'é un pompaggio illimitato di energia. Questa situazione non è conciliabile con le (4.4), (4.5). Infatti per la (3.5) la densità media deve rimanere costante

$$\langle \rho \rangle = \frac{\mathcal{M}}{V}$$

e al pompaggio di energia deve corrispondere un aumento di $\langle v^2 \rangle$ e di $\langle T \rangle$; un aumento di questi valori implica la violazione della (4.4) e (4.5). Resta quindi, per la $E(t)$, o un andamento asintotico ad un valore costante o un andamento periodico con valor medio costante. Per dire qualcosa di più è necessario discutere gli andamenti delle soluzioni delle equazioni differenziali (1.1), (1.9) e (4.1) con in più l'equazione di stato. Questo è un sistema di equazioni differenziali non lineari le cui soluzioni di interesse sono quelle definite in un dominio spaziale limitato; le funzioni $\rho(\overline{r}, t)$, $T(\overline{r}, t)$ e $\overline{v}(\overline{r}, t)$ dovranno, dopo un periodo transiente o tendere ad un andamento ciclico o ad un fenomeno di raddoppio di periodo[4] fino a perdere il carattere ciclico. Se un regime ciclico si instaura ci troviamo o nel caso dell'asintoto di $E(t)$ raggiunto in media:

$$\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \dot{E}(t')\, dt' = 0, \qquad t > t_0 \tag{4.8}$$

o raggiunto puntualmente

$$\dot{E} = 0. \qquad t > t_0 \tag{4.9}$$

Se il sistema ammette soluzioni cicliche deve essere

$$\begin{aligned} \rho(\overline{r}, t+\tau_1) &= \rho(\overline{r}, t) \\ T(\overline{r}, t+\tau_2) &= T(\overline{r}, t) \\ \overline{v}(r, t+\tau_3) &= v(\overline{r}, t) \end{aligned} \tag{4.10}$$

il valore di τ che compare nella (4.8) è il minimo comune multiplo di τ_1, τ_2 e τ_3.

Sembra che la situazione (4.9) implichi la presenza di una qualche simmetria. Nella ref. (1) si è mostrato che con simmetria sferica ed input di radiazione periodico si ha $\dot{E} = 0$. Il caso di input periodico e assenza di simmetria sferica (o cilindrica) produce una $\dot{E}$ oscillante. Non siamo tuttavia capaci di dare una formulazione generale rigorosa di questa idea.

Integrando l'equazione (4.7) si ottiene

$$\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} dt' \left\{ \int_S x\nabla T \cdot \overline{n}\, dS - \int_V \rho\nabla\Psi \cdot \overline{v}\, dV + \right. \\ \left. + \int_V \xi\, dV \right\} = 0; \tag{4.11}$$

la (4.11) esprime il bilancio energetico del regime stazionario. Osservando che

$$\int_t^{t+\tau} dt' \int_V \rho\nabla\Psi \cdot \overline{v}\, dV = 0,$$

la (4.11) diventa

$$\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} dt' \int_S x\nabla T \cdot \overline{n}\, dS = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} dt' \int_V \xi\, dV\ ; \tag{4.12}$$

la (4.12) può essere formalmente riscritta come

$$\Delta\phi \equiv \phi^{\mathrm{out}} - \phi^{\mathrm{in}} = \boxed{-} \tag{4.13}$$

cioè nel regime stazionario la differenza fra i flussi di potenza è uguale alla potenza emessa o assorbita dal sistema. La (4.13) è la formulazione più generale di un bilancio energetico per un sistema stazionario confinato.

ϕ^{out} e ϕ^{in} sono scambi con l'esterno: essi non sono bilanciati, infatti in presenza di sorgente il sistema confinato è un emettitore netto; $\phi^{out} > \phi^{in}$.

Cosa è l'esterno di $x\nabla T$? Al di fuori di S non c'è né materia né conduzione pertanto l'espressione $\int_S x\nabla T \cdot \bar{n}\, dS$ deve essere intesa come una condizione al contorno autoconsistente. L'unico flusso di energia in assenza di flusso di materia è la radiazione; essa può essere gravitazionale ed elettrodebole. Nella ref. (1) è stato studiato il caso di condizioni al contorno elettromagnetiche per una superficie di separazione solido-vuoto in assenza di sorgente ξ. Uno studio generale della (4.13), a nostra conoscenza, è ancora mancante.

Passiamo infine all'entropia. L'equazione differenziale dell'entropia in assenza di sorgente ξ era la (1.16); in presenza di ξ diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho s = -\operatorname{div}\left[(\bar{v}\rho s) - x\frac{\nabla T}{T}\right] + x\,\frac{(\nabla T)^2}{T^2} + \\ + \frac{1}{T}\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\zeta}{T}\,. \qquad (4.14)$$

Notiamo che la $s(T)$ è una funzione di stato tanto quanto la $\epsilon(T)$. Quindi, se sono cicliche le soluzioni delle equazioni differenziali del moto, possiamo fare per la funzione

$$\dot{\mathscr{S}}(T) = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho s\, dV$$

gli stessi ragionamenti che abbiamo fatto per la $E(t)$. Supponendo che esista una soluzione ciclica tale che $\dot{\mathscr{S}} = 0$ integrando la (4.14) otteniamo

$$\int_S \left(\bar{v}\rho s - x\frac{\nabla T}{T}\right)\cdot \bar{n}\, dS = \int_V \frac{(\nabla T)^2}{T^2}\, dV + \int_V \frac{1}{T}\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\, dV + \\ + \int_V \frac{\zeta}{T}\, dV \qquad (4.15)$$

Il bilancio (4.15) è interessante. Si noti che i tre integrali di volume sono positivi. Il terzo integrale è fatto assumendo $T_\xi > T(\bar{r}, t)$, ossia che la ζ sia veramente una sorgente.

Osserviamo ulteriormente che per la (3.5) si deve avere

$$\int_S \bar{v} \rho s \, dS = 0$$

mentre l'altro integrale di superficie rimane, a causa dei flussi di energia. Si ha quindi che

$$\int_S x \frac{\nabla T}{T} \cdot n \, dS \equiv \Delta \phi_s = \qquad (4.16)$$
$$= \int_V \left[\frac{(\nabla T)^2}{T^2} + \frac{1}{T} \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\zeta}{T} \right] dV > 0$$

Il flusso $\Delta \phi_s$ sarà la differenza fra due flussi, uno entrante e l'altro uscente, entrambi associati a flussi energetici di radiazione[1]. Quindi il sistema nel regime ciclico soddisfa al bilancio

$$\phi_s^{\text{out}} - \phi_s^{\text{in}} = \int_V \left[x \frac{(\nabla T)^2}{T^2} + \frac{1}{T} \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\zeta}{T} \right] dV \; ; \qquad (4.17)$$

pertanto l'entropia non è conservata; nel senso che il sistema emette verso l'esterno un flusso maggiore di quello ricevuto.

Se l'andamento asintotico della $\mathscr{S}(t)$ è un andamento oscillante, analogamente a quanto fatto per l'energia, si deve mediare sul tempo. Il bilancio sarà pertanto

$$\phi_s^{\text{out}} - \phi_s^{\text{in}} = \int_t^{t+\tau} dt' \int_V \left[x \frac{(\nabla T)^2}{T^2} + \frac{1}{T} \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\zeta}{T} \right] dV. \qquad (4.18)$$

Cosa tiene in azione un sistema fluidodinamico confinato facendo si che restino stazionari nel tempo gli output di entropia espressi dalla (4.17)? Noi abbiamo escluso in tutta questa trattazione lo studio di input esterni meccanici; per esempio pareti confinanti adiabatiche, o no, mosse da un macchinario esterno. Sebbene questi casi possano essere di grande interesse nell'ingegneria, abbiamo voluto limitarci a confinamenti autoconsistenti cioè dovuti agli stessi campi di forze che compaiono nelle equazioni. Pertanto le cause del moto del sistema fluidodinamico non possono che essere dei bagni termici posti in comunicazione col sistema mediante flussi di radiazione.

Non c'è altro concepibile modo di interagire. Questo avviene in cosmologia, in fisica planetaria e in teoria del plasma.

BIBLIOGRAFIA

(1) F. D'Isep e L. Sertorio, Maximum mechanical work from the steady energy circulation on a finite body. (1981) Nuovo Cimento 67 B, pag. 41.
M. Feigenbaum e L. Sertorio, Entropy balance for non-equilibrium steady states. (1981) Nuovo Cimento 64 B, N. 2, pag. 252.

(2) S. R. de Groot e P. Mazur, Non-equilibrium thermodynamics. (1962). North-Holland.
I Prigogine, Thermodynamics of irreversible processes. (1961) Interscience.

(3) L. Sertorio, Statistical mechanics at high energy density. (1979) La rivista del Nuovo Cimento (Vol. 2).

(4) M. Feigenbaum, Universal behavior in nonlinear systems. (1980) Los Alamos Science. (Vol. 1,1).

Prolungamenti non abeliani di equazioni di evoluzione non lineari: alcuni recenti risultati

Giulio Soliani *

1. Introduzione

Nel 1975 Estabrook e Wahlquist introdussero i concetti di "pseudopotenziale" e di "prolungamento di struttura" nello studio di equazioni differenziali non lineari alle derivate parziali [1].

Il loro metodo consiste nel definire, mediante certe equazioni differenziali, nuove variabili dipendenti, in modo tale che la condizione di integrabilità per l'esistenza di queste variabili sia proprio l'equazione differenziale non lineare che si intende studiare. Le equazioni che definiscono le nuove variabili, chiamate equazioni di prolungamento, possono essere interpretate come una generalizzazone delle trasformate di Bäcklund.

Il metodo di prolungamento, che può essere realizzato usando il linguaggio delle forme differenziali esterne [1] o dei "jet bundles" [2], è stato inizialmente applicato ad alcune equazioni di evoluzione non lineari di particolare importanza per il loro contenuto fisico, quali ad esempio l'equazione di Korteweg-de Vries e l'equazione di Korteweg-de Vries modificata [3], vale a dire:

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 \tag{1.1}$$

e

$$u_t + u_{xxx} + u^2 u_x = 0, \tag{1.2}$$

dove $u \equiv u(x, t)$, t ed x sono, rispettivamente, il tempo ed una variabile spaziale, e gli indici x e t denotano derivate parziali.

---

* Istituto di Fisica dell'Università, Lecce e Istituto Nazionale di Fisica Nucleare.

Prolungamenti non abeliani di equazioni di evoluzione non lineari: alcuni recenti risultati

Giulio Soliani *

1. Introduzione

Nel 1975 Estabrook e Wahlquist introdussero i concetti di "pseudopotenziale" e di "prolungamento di struttura" nello studio di equazioni differenziali non lineari alle derivate parziali (1).

Il loro metodo consiste nel definire, mediante certe equazioni differenziali, nuove variabili dipendenti, in modo tale che la condizione di integrabilità per l'esistenza di queste variabili sia proprio l'equazione differenziale non lineare che si intende studiare. Le equazioni che definiscono le nuove variabili, chiamate equazioni di prolungamento, possono essere interpretate come una generalizzazone delle trasformate di Bäcklund.

Il metodo di prolungamento, che può essere realizzato usando il linguaggio delle forme differenziali esterne (1) o dei "jet bundles" (2), è stato inizialmente applicato ad alcune equazioni di evoluzione non lineari di particolare importanza per il loro contenuto fisico, quali ad esempio l'equazione di Korteweg-de Vries e l'equazione di Korteweg-de Vries modificata (3), vale a dire:

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 \tag{1.1}$$

e

$$u_t + u_{xxx} + u^2 u_x = 0, \tag{1.2}$$

dove $u \equiv u(x, t)$, t ed x sono, rispettivamente, il tempo ed una variabile spaziale, e gli indici x e t denotano derivate parziali.

* Istituto di Fisica dell'Università, Lecce e Istituto Nazionale di Fisica Nucleare.

Dall'analisi di queste e di altre equazioni di evoluzione [4] emerge che si ottengono prolungamenti che possono essere usati per determinare trasformate di Bäcklund e, di conseguenza, soluzioni non banali, soltanto quando è possibile associare ad ogni equazione in esame un'algebra di Lie non-Abeliana a infinite dimensioni [5].

Si è trovato che tutte le equazioni di evoluzione considerate finora che possiedono la proprietà di essere completamente integrabili, ammettono prolungamenti non-Abeliani. Questo fatto porta a ritenere che ci sia una corrispondenza tra equazioni di evoluzione non lineari completamente integrabili ed esistenza di prolungamenti non-Abeliani.

La mancanza di una teoria generale suggerisce di esaminare il maggior numero di casi che confermino l'esistenza di tale corrispondenza, con l'obiettivo di ottenere indicazioni utili per la costruzione della teoria.

In questa problematica si inseriscono alcuni recenti contributi [6,7] di M. Leo, R. A. Leo, L. Martina, F. A. E. Pirani e G. Soliani, i quali hanno studiato la classe di equazioni di evoluzione non lineari:

$$u_t + u_{xxx} + \varphi(u, u_x) = 0 \tag{1.3}$$

a cui appartengono le equazioni (1.1) e (1.2).

Applicando il metodo di Estabrook e Wahlquist, i predetti autori hanno:

a) determinato la classe di funzioni $\varphi(u, u_x)$ tali che l'equazione (1.3) ammetta un prolungamento non-Abeliano;
b) individuato le algebre di Lie corrispondenti;
c) delineato una procedura, basata sulle proprietà di tali algebre, atta a determinare esplicitamente trasformate di Bäcklund, soluzioni solitoniche e soluzioni periodiche della (1.3) (nei casi in cui il prolungamento di struttura sia non-Abeliano).

2. Determinazione di $\varphi(u, u_x)$

Introduciamo l'insieme di variabili $\{y^A\}$ definite dalle equazioni [6]:

$$y^A_x = F^A(u, y^B), \tag{2.1a}$$

$$y^A_t = G^B(u, u_x, u_{xxx}, y^B), \tag{2.1b}$$

dove $A, B = 1, 2, \ldots, N$.

La condizione di integrabilità per le Eq.ni (2.1), che ci assicura che $y^A_{xt} = y^A_{tx}$, è data dalla relazione:

$$D_x G^A = D_t F^A \quad (A = 1, 2, ..., N)\,, \tag{2.2}$$

dove:

$$D_x = u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + F^B \frac{\partial}{\partial y^B}\,, \tag{2.3}$$

e

$$D_t = u_t \frac{\partial}{\partial u} + G^B \frac{\partial}{\partial y^B}\,. \tag{2.4}$$

Tenendo conto della (1.3) la (2.2) diventa:

$$(F^A_u + G^A_p)\, r + F^A_u\, \varphi = [F, G]^A + G^A_u z + G^A_z\, p = 0, \tag{2.5}$$

dove $z = u_x$, $p = u_{xx}$, $r = u_{xxx}$, e

$$[F, G]^A = F^B \frac{\partial G^A}{\partial y^B} - G^B \frac{\partial F^A}{\partial y^B}\,.$$

In seguito ometteremo, oer semplicità, gli indici; scriveremo cioè F per F^A, F_u per F^A_u, e così via.

Dalla richiesta che la (2.5) sia identicamente soddisfatta per ogni valore delle variabili indipendenti u, z, p ed r si ottiene:

$$\begin{aligned} &{}^1\!/_2\, z^3 F_{uuu} + \frac{3}{2} z^2 [F, F_{uu}] + z([F, [F, F_u]] - \\ &\quad - L_u) - [F, L] + F_u\, \varphi(u, z) = 0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

dove L, funzione di integrazione dipendente solo da u e da y, è legata a G dalla relazione:

$$G = -pF_u + {}^1\!/_2\, z^2 F_{uu} + z[F, F_u] - L\,. \tag{2.7}$$

Poiché la (2.6) è valida per ogni z, si deduce che $\varphi(u, z)$ è un polinomio di terzo grado in questa variabile, vale a dire:

$$\varphi(u, z) = g(u) + h(u) z - \frac{3}{2} k(u) z^2 - {}^1\!/_2\, m(u) z^3\,. \tag{2.8}$$

Sostituendo la (2.8) nella (2.6) ed eguagliando a zero i coefficienti delle potenze di z si trovano le equazioni:

$$F_{uuu} = m F_u\,, \tag{2.9a}$$

$$[F, F_{uu}] = kF_u \ , \tag{2.9b}$$

$$L_u = [F, [F, F_u]] + hF_u \ , \tag{2.9c}$$

$$[F, L] = gF_u \ . \tag{2.9d}$$

Le Eq.ni (2.9) consentono di determinare le funzioni $m(u)$, $k(u)$, $h(u)$, $g(u)$, $F(u, y)$, $L(u, y)$ (e quindi, per la (2.7), $G(u, z, p, y)$) in modo tale che all'Eq.ne (1.3), dove φ è data dalla (2.8), sia possibile associare un'algebra di Lie non-Abeliana(7).

Questo problema è stato risolto in generale; qui ci si limiterà a trattare in modo esauriente solo il caso in cui F_u ed F_{uu} sono considerati linearmente indipendenti ed m è una costante non nulla, mentre k è assunta eguale a zero.

3. Un esempio di prolungamento

Nell'ipotesi in cui F_u ed F_{uu} siano linearmente indpendenti, se $m = \text{cost} \neq 0$ e $k = 0$ dalla (2.9a) si ricava:

$$F = a(y)e^{\lambda u} + b(y)e^{-\lambda u} + c(y), \tag{3.1}$$

dove $\lambda^2 = m$ e le quantità a, b, e c sono funzioni di integrazione che dipendono soltanto dalle variabili y^A.

Sostituendo la (3.1) nella (2.9b) (dove $k = 0$), si ottengono le relazioni:

$$[c, a] = 0, \ \ [c, b] = 0 \ . \tag{3.2}$$

La conoscenza di $F(u, y)$, data dalla (3.1), e l'uso della (2.9c) consetono di determinare $L_u(u, y)$; si ha:

$$L_u = 2\lambda \{e^{\lambda u}[a, f] + e^{-\lambda u}[b, f]\} + \lambda h(u)(ae^{\lambda u} - be^{-\lambda u}). \tag{3.3}$$

La (3.3), integrata rispetto ad u, fornisce l'espressione:

$$L(u, y) = 2 \{e^{\lambda u}[a, f] - e^{-\lambda u}[b, f]\} + \lambda(h_1 a - h_2 b) + d, \tag{3.4}$$

dove $d \equiv d(y)$ è una funzione arbitraria delle variabili y^A, e

$$h_1 = \ h(u)e^{\lambda u}du, \ \ h_2 = \ h(u)e^{-\lambda u}du \ . \tag{3.5}$$

Tenendo conto della (3.4), dalla (2.9d) si giunge alla formula:

$$2\{e^{2\lambda u}[a,[a,f]]-e^{-2\lambda u}[b,[b,f]]\}+\lambda(b_1e^{-\lambda u}+b_2e^{\lambda u})f+$$
$$+[a,d]e^{\lambda u}+[b,d]e^{-\lambda u}+[c,d]=\lambda g(ae^{\lambda u}-be^{-\lambda u}), \qquad (3.6)$$

la quale, unitamente alla relazione che risulta commutando f con $[F, L]$, nell'ipotesi in cui $[a,f]\neq 0$ e $[b,f]\neq 0$ implica

$$g=\alpha_0+\alpha_1e^{-\lambda u}+\alpha_2e^{\lambda u}, \qquad (3.7)$$

dove α_0, α_1 ed α_2 sono costanti (sia rispetto ad u che alle y^A).

Mediante una procedura analoga si trova

$$b=\gamma_0+\gamma_1e^{2\lambda u}+\gamma_2e^{-2\lambda u}+\gamma_3u, \qquad (3.8)$$

dove γ_0, γ_1, γ_2 e γ_3 sono costanti.

Con l'ausilio delle (3.7), (3.8) e (3.5), annullando i coefficienti (indipendenti da u) che stanno in fronte alle funzioni, fra loro indipendenti, della sola u, vale a dire $e^{\lambda u}$, $e^{-\lambda u}$ e così via, dalla (3.6) si ottengono infine le relazioni:

$$2[a,[a,f]]+\frac{4}{3}\gamma_1f=\lambda\alpha_2a, \qquad (3.9a)$$

$$2[b,[b,f]]+\frac{4}{3}\gamma_2f=\lambda\alpha_1b, \qquad (3.9b)$$

$$[a,d]=\lambda\alpha_0a, \qquad (3.9c)$$

$$[b,d]=-\lambda\alpha_0b, \qquad (3.9d)$$

$$[c,d]=2\frac{\gamma_3}{\lambda}f+\lambda\alpha_1a-\lambda\alpha_2b\ . \qquad (3.9e)$$

Se γ_1 e γ_2 si suppongono diverse da zero, si può far vedere [7] che le costanti α_0, α_1, α_2 e γ_3 sono nulle; in questo caso le (3.9) diventano:

$$[a,[a,f]]=-\frac{2}{3}\gamma_1f, \qquad (3.10a)$$

$$[b,[b,f]]=-\frac{2}{3}\gamma_2f, \qquad (3.10b)$$

$$[a,d]=0, \qquad (3.10c)$$

$$[b,d]=0, \qquad (3.10d)$$

$$[c, d] = 0, \tag{3.10e}$$

le quali, insieme alle relazioni $[a, c] = 0$, $[b, c] = 0$, $[d, f] = 0$, $[c, f] = 0$ (dove $f \equiv [c, b]$), costituiscono l'algebra (non-Abeliana) di prolungamento associata all'equazione (si veda la (2.8):

$$u_t + u_{xxx} + (\gamma_0 + \gamma_1 e^{2\lambda u} + \gamma_2 e^{-2\lambda u}) u_x - {}^1\!/_2\, m u_x^3 = 0. \tag{3.11}$$

Ponendo $u = \dfrac{W}{2\lambda}$, la (3.11) diventa:

$$W_t + W_{xxx} + (\gamma_0 + \gamma_1 e^W + \gamma_2 e^{-W}) W_x - \frac{1}{8} W_x^3 = 0. \tag{3.12}$$

L'Eq.ne (3.12) è stata dedotta, originariamente, da Calogero e Degasperis [8] in base al metodo della "trasformata spettrale"; essa possiede infinite leggi di conservazione, trasformate di Bäcklund, soluzioni multisolitoniche. Inoltre, esiste una trasformazione che collega la (3.12) all'equazione di Korteweg-de Vries modificata $u_t + u_{xxx} + (c_1 + c_2 u^2) u_x = 0$, dove c_1 e c_2 sono costanti. Precisamente, si può dimostrare [9] che se $W(x, t)$ soddisfa l'equazione:

$$\begin{aligned} W_t + W_{xxx} + \left[\gamma - \frac{3}{8} b^2 \left(c_1 e^{\frac{W}{2}} + c_2 e^{-\frac{W}{2}}\right)^2\right] W_x - \\ - \frac{1}{8} W_x^3 = 0, \end{aligned} \tag{3.13}$$

dove c_1, c_2, γ e b sono costanti, allora la funzione $u(x, t)$ data dall'espressione:

$$u = W_x + b\left(c_1 e^{\frac{W}{2}} + c_2 e^{-\frac{W}{2}}\right), \tag{3.14}$$

è soluzione dell'Eq.ne di Korteweg-de Vries modificata:

$$u_t + u_{xxx} + \left(\gamma - \frac{3}{8} u^2\right) u_x = 0. \tag{3.15}$$

4. Trasformate di Bäcklund e soluzioni esplicite

Al fine di illustrare il metodo seguito nel lavoro [7] per determinare trasformate di Bäcklund e soluzioni esplicite della (3.12), poniamo

per convenienza in tale equazione $\gamma_0 = 0, \gamma_1 \equiv \gamma_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}$ ed eseguiamo poi le trasformazioni:

$$x \to \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} x, \qquad W \to i\left(u - \frac{\pi}{2}\right).$$

In questo modo la (3.12) assume la forma:

$$u_t + u_x \sin u + \frac{2}{3}(u_{xxx} + u_x^3) = 0. \tag{4.1}$$

L'algebra di Lie (non-Abeliana) associata alla (4.1) è data da

$$[a', [a', f']] = [b', [b', f']], \tag{4.2a}$$

$$[a', [b', f']] = -f', \tag{4.2b}$$

$$\begin{aligned} &[a', c'] = [b', c'] = [a', d'] = 0 \\ &[b', d'] = [c', d'] = 0, \end{aligned} \tag{4.2c}$$

dove ora $f' = [a', b']$. (In seguito ometteremo per semplicità gli apici).

Ci si aspetta che l'algebra (4.2) sia ad infinite dimensioni [10]; tuttavia per scopi pratici, precisamente al fine di determinare soluzioni esplicite nell'Eq.ne (4.1), è opportuno cercare algebre quozienti di dimensioni finite, assumendo, per esempio, che a, b ed f siano linearmente indipendenti, e che $[a, f]$ e $[b, f]$ dipendano linearmente da a, b ed f. In altri termini si suppone che:

$$\begin{aligned} &[a, f] = \alpha a + \beta b + \gamma f, \\ &[b, f] = \alpha' a + \beta' b + \gamma' f, \end{aligned} \tag{4.3}$$

dove α, β, γ, ... sono costanti.

Sostituendo (4.3) nelle (4.2), si trova che è possibile associare all'Eq.ne (4.1) le seguenti algebre di Lie (non-Abeliane) [6]:

a) l'algebra di Lie $2D \oplus R$, definita dalle relazioni:

$$[a, f] = \epsilon f, \quad [b, f] = -\epsilon f \quad (\epsilon = \pm 1); \tag{4.4}$$

b) l'algebra di Lie

$$[a, f] = a + \lambda b, \quad [b, f] = -\lambda a - b, \tag{4.5}$$

dove λ è un parametro arbitrario.

Le (4.5) definiscono l'algebra di $SO(3)$ per $\lambda < 1$, di $SL(2, R)$ se $-1 < \lambda < 1$, e nel caso in cui $\lambda = \pm 1$, un'algebra di Lie con algebra derivata bi-dimensionale.

Al fine di costruire trasformate di Bäcklund per l'equazione (4.1), ci limiteremo a considerare un prolungamento unidimensionale, in cui cioè l'insieme di variabili $\{y^A\}$ è costituito da un solo elemento, y ("pseudopontenziale di prima specie", v. il lavoro n.[3]). Come conseguenza immediata di questa scelta, le (4.2c) implicano $d = c = 0$.

Cerchiamo ora una soluzione $\psi(u, y)$ della (4.1), vale a dire nella equazione:

$$\psi_t + \psi_x \sin\psi + \frac{2}{3}\left(\psi_{xxx} + \frac{1}{8}\psi_x^3\right) = 0, \tag{4.6}$$

tale che:

1) u sia soluzione della (4.1);

2) y soddisfi le equazioni di prolungamento (2.1).

Seguendo la procedura descritta nel lavoro[7] e tenendo conto delle Eq.ni (2.1) e (4.1) si ha:

$$\begin{aligned}\psi_t = \psi_u u_t + \psi_y y_t = \psi_u &\left[-z \sin u - \frac{2}{3}\left(r + \frac{1}{8}z^3\right)\right] + \\ &+ \psi_y G,\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\psi_x = \psi_u z + \psi_y F. \tag{4.8}$$

Sostituendo (4.7) e (4.8) nella (4.6) ed osservando che ψ e le sue derivate dipendono solo da u ed y, annullando i coefficienti delle variabili indipendenti r, p e così via, si ottiene:

$$\psi = u + \rho(y), \tag{4.9}$$

e

$$\rho(y) = 4 \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + (2n - 1)\pi, \tag{4.10}$$

dove n è un intero arbitrario.

Le (4.9) e (4.10) ci permettono di scrivere subito la trasformata di Bäcklund:

$$(\psi - u)_t = 4 \frac{f}{a^2 + b^2} y_t \,, \tag{4.11a}$$

$$(\psi - u)_x = 4 \frac{f}{a^2 + b^2} y_x \,, \tag{4.11b}$$

dove a e b sono i generatori di una delle lagebre di Lie definite dalle (4.4) e (4.5).

Le relazioni (4.11) possono essere usate per determinare alcune soluzioni esplicite dell'Eq.ne (4.1).

A tale scopo osserviamo che la quantità:

$$\Lambda = \frac{f^2 - 2ab}{a^2 + b^2} \tag{4.12}$$

è costante rispetto allo pseudopotenziale (di prima specie) y.

Si ha inoltre [7]:

$$v_y = \frac{f}{M^2} \,, \tag{4.13}$$

dove

$$v = \frac{M}{N} \,, \tag{4.14}$$

$$M = \mathrm{a} \sin \frac{u}{2} + \mathrm{b} \cos \frac{u}{2} \,, \tag{4.15}$$

$$N = - \mathrm{a} \cos \frac{u}{2} + \mathrm{b} \sin \frac{4}{2} \,. \tag{4.16}$$

Utilizzando (4.15) e (4.16) e tenendo presente la (4.14), dalla (4.12) si ottiene:

$$\Lambda = (1 + v^2)^{-1} \, \{M^2 v_y^2 - (1 - v^2) \sin u + 2v \cos u\}. \tag{4.17}$$

Si consideri ora la soluzione banale $u \equiv \overline{u} =$ costante dell'Eq.ne (4.1). In questo caso le (2.1) si scrivono:

$$y_x = F|_{u=\overline{u}} = M(y, \overline{u}), \tag{4.18}$$

$$y_t = G|_{u=\overline{u}} = - VM(y, \overline{u}), \tag{4.19}$$

dove

$$V = \frac{1}{3} (2\,\Lambda + \sin\overline{u}).$$

Dalle (4.17), (4.18) e (4.19) si deduce che

$$x - Vt + c_0 = \int \{(\Lambda - \sin\bar{u})v^2 - 2\cos\bar{u}\, v + \\ + \Lambda + \sin\bar{u}\}^{1/2}\, dv, \qquad (4.20)$$

dove c_0 è una costante di integrazione.

Ponendo ora $u = \bar{u}$ in (4.9), in virtù della (4.14) si ha:

$$\psi = -\bar{u} + 4\,\mathrm{arctg}\, v + (2n+1)\pi\,. \qquad (4.21)$$

Dalla (4.21) e dalla (4.20) è possibile costruire ψ in funzione di v.

Ci limiteremo qui a fornire solo un esempio di soluzione esplicita della (4.6). A questo fine poniamo $\Delta = 4(1-\Lambda^2)$; nel caso in cui $\Delta < 0$ e $\Lambda > \sin\bar{u}$, si trova:

$$v = (\Lambda - \sin\bar{u})^{-1}\, \{(\Lambda^2-1)^{1/2} \sinh[(\Lambda - \sin\bar{u})^{1/2}(x - Vt + c_0)] + \\ + \cos\bar{u}\}\,. \qquad (4.22)$$

Se ora si sostituisce la (4.22) nella (4.21), si ottiene una soluzione dell'Eq.ne (4.6) di tipo "kink".

Seguendo la stessa procedura si possono determinare altre soluzioni esplicite dell'Eq.ne (4.6) (di tipo onda solitaria a campana e di tipo periodico).

BIBLIOGRAFIA

(1) H. D. Wahlquist and F. B. Estabrook, "Prolongation structures of nonlinear evolution equations", J. Math Phys. **16**, 1 (1975).

(2) F. A. E. Pirani, D. C. Robinson and W. F. Shadwick, Math. Phys. Studies **1**, 1 (1979).

(3) J. P. Corones and F. J. Testa, "Pseudopotentials and their applications", in *Bäcklund Transformations*, Ed. by R. N. Miura, Lecture Notes in Mathematics **515**, Springer Verlag, Berlin, 1976, p. 184.

(4) R. Hermann, "Prolongations, Bäcklund transformations, and Lie theory as algorithms for solving and understanding nonlinear differential equations", in *Solitons in Action*, Academic Press N.Y., 1978 (Ed. by K. Lonngren and A. Scott).

(5) Quando è possibile associare, a una data equazione differenziale, un'algebra di Lie non-Abeliana, diremo che il prolungamento di struttura è non-Abeliano.

(6) M. Leo, R. A. Leo, L. Martina, F. A. E. Pirani and G. Soliani, "Non-Abelian prolongations and complete integrability", Preprint UL/IF-84-79/80, Università di Lecce, 1980.

(7) M. Leo, R. A. Leo, F. A. E. Pirani, G. Soliani, preprint in corso di stesura (Univ. di Lecce).

(8) F. Calogero and A. Degasperis, "Reduction technique for matrix nonlinear evolution equations solvable by spectral transform", in corso di stampa (J. of Math. Phys.).

(9) La (3.14) è la generalizzazione di una trasformazione scoperta da F. Magri (1979) per l'equazione

$$u_t + u_{xxx} + u_x \sin u + \frac{1}{8} u_x^3 = 0.$$

Si veda anche l'articolo di A. Degasperis, in "Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems", *Lectures Notes in Physics 120*, Springer-Verlag, Berlin, 1980, p. 16 (ed. M. Boiti, F. Pempinelli, G. Soliani).

(10) W. F. Shadwick, "The KdV prolongation algebra", J. of Math. Phys. **21**, 454 (1980).

Sui modelli newtoniani di universo omogenei e anisotropi

Dionigi Galletto - Bruno Barberis

A Mario Verde in occasione del suo sessantesimo compleanno

1. E' presumibile che le ben note analogie che intercorrono nel caso isotropo tra la cosmologia newtoniana e la cosmologia relativistica intercorrano anche nel caso anisotropo, come è già stato rilevato in [9] per il caso della soluzione di Gödel, in [17] e [14] per il caso dell'equazione di Raychaudhuri, ecc. Anche per questa ragione, e quindi per la possibilità di individuare modelli analoghi di universo nel quadro della teoria della relatività generale, è interessante lo studio dei modelli d'universo fatto nell'ambito newtoniano.

Nel presente lavoro, in analogia al caso isotropo ampiamente trattato in [5], viene avviato nell'ambito newtoniano uno studio sistematico dei modelli anisotropi e omogenei, studio che permette di pervenire all'equazione di evoluzione direttamente dal principio cosmologico, ossia da un'ipotesi di carattere essenzialmente cinematico, senza dover far ricorso alla teoria newtoniana della gravitazione.

Mediante l'intervento dell'equazione di evoluzione segue facilmente che, contrariamente a quanto dedotto in [7], ecc., sono dinamicamente impossibili modelli ad espansione isotropa e rotazione pura e, se si aggiunge l'ipotesi che l'accelerazione risulti puramente radiale, anche modelli a rotazione pura.

2. Assumendo che gli assi di simmetria perpendicolari ai piani delle generiche galassie a spirale abbiano direzione invariabile nello spazio(1), il riferimento individuato da una terna avente l'origine nel baricentro O di una qualsiasi galassia e gli assi paralleli a tre dei suddetti assi di simmetria risulta in moto traslatorio rispetto ai riferimenti inerziali.

(1) Si escludono quindi eventuali moti di precessione che l'osservazione astronomica non ha ancora rilevato nemmeno per la nostra galassia e che quasi certamente non saranno mai rilevabili.

Risulta pertanto individuata un'intera classe di riferimenti, che verranno chiamati *naturali*, aventi l'origine nei baricentri delle galassie e in moto traslatorio rispetto ai riferimenti inerziali.

L'introduzione di siffatti riferimenti, teoricamente molto più aderente alla realtà di quella consistente nel considerare semplicemente i riferimenti individuati da quaterne di generiche galassie non complanari, viene effettuata per studiare la possibilità di moti per l'Universo che differiscano dal caso della pura espansione isotropa, ampiamente studiato in [5].

Si riterrà inoltre che valga il cosiddetto *principio cosmologico*: ad un dato istante l'Universo presenta il medesimo aspetto ad ogni osservatore ad esso solidale.

Ciò premesso, si può assumere come schema per l'Universo quello della materia disgregata e rappresentare questo schema mediante un fluido $\mathscr{U}$ (fluido cosmologico) per il quale siano trascurabili gli sforzi interni, esteso a tutto lo spazio che si supporrà euclideo. Sia poi $\mathscr{T}_O$ un qualsiasi riferimento naturale (riferimento avente l'origine nell'elemento O di $\mathscr{U}$, scelto ad arbitrio, ed in moto traslatorio rispetto ai riferimenti inerziali), riferimento che si supporrà individuato da un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x^i $(i = 1, 2, 3)$ con origine in O.

L'applicazione del principio cosmologico implica che la densità μ di $\mathscr{U}$ sia funzione solo del tempo[2], ossia che $\mathscr{U}$ sia omogeneo e che, comunque considerato l'elemento P di $\mathscr{U}$, per la sua velocità rispetto a $\mathscr{T}_O$ risulti[3]

$$v_i = b_{ij}(t)\, x^j \;,$$

ossia, introducendo la matrice $H = ||b_{ij}||$:

$$\frac{d\,OP}{d\,t} = H\,OP \;, \tag{1}$$

dove si sono usati gli stessi simboli per indicare sia i vettori OP e $d\,OP/d\,t$ che le corrispondenti matrici ad una sola colonna che hanno per elementi le componenti di detti vettori e dove il prodotto tra matrici si intende effettuato righe per colonne.

(2) Cfr., ad es., [11], Cap. IX, § 1.
(3) Cfr., ad es., [11], loc. cit., [4], 1 (b).

Da (1) segue

$$\frac{d^2\, OP}{d\, t^2} = (\dot{H} + H^2)\, OP\,, \tag{2}$$

con

$$\dot{H} = \frac{d\, H}{d\, t}\,.$$

Il principio cosmologico implica, ovviamente, che i risultati espressi da (1) e (2) permangano immutati se invece di $\mathcal{T}_O$ si considera un qualunque altro riferimento naturale $\mathcal{T}_{O'}$, con l'origine nell'elemento O' di $\mathcal{U}$ scelto ad arbitrio. Risulta cioè

$$\frac{d\, O'P}{d\, t} = H\, O'P\,, \tag{1'}$$

$$\frac{d^2\, O'P}{d\, t^2} = (\dot{H} + H^2)\, O'P\,. \tag{2'}$$

In altri termini, l'Universo ha lo stesso comportamento cinematico, espresso da (1') e (2'), rispetto a tutti i riferimenti naturali.

Introdotte le matrici $Q = ||q_{ij}||$ e $\Omega = ||\omega_{ij}||$, definite da

$$Q = \frac{1}{2}(H + H^T) - \frac{1}{3}\, tr\, H\, I\,, \tag{3}$$

$$\Omega = \frac{1}{2}(H - H^T)\,, \tag{4}$$

dove con I si è indicata la matrice identica, con H^T la trasposta di H e con $tr\, H$ la traccia di H, per le suddette matrici risulta

$$Q = Q^T\,, \quad tr\, Q = 0, \quad \Omega = -\,\Omega^T\,, \tag{5}$$

mentre per la matrice H sussiste la decomposizione

$$H = \frac{1}{3}\, tr\, H\, I + Q + \Omega\,. \tag{6}$$

3. Ritenendo, come è già implicito nelle considerazioni sino ad ora svolte, che tutte le funzioni che vengono considerate siano continue e, quando occorre, derivabili con derivata continua, ossia ritenendo,

in accordo con l'esperienza, che il movimento di $\mathscr{U}$ rispetto a $\mathscr{C}_O$ sia sufficientemente regolare, si indichi con P_0 la posizione assunta dall'elemento P nell'istante t_0 fissato ad arbitrio una volta per tutte, ossia si ponga

$$OP(t_0) = OP_0 \ . \tag{7}$$

Con le ipotesi ora fatte, da (1) segue che per ogni elemento P di $\mathscr{U}$ risulta

$$OP = A\ OP_0 \ , \tag{8}$$

con la matrice $A(t)$ individuata da (1) e dalla condizione

$$A(t_0) = I \ . \tag{9}$$

Per provare l'asserto si osservi che, affinché il vettore OP espresso da (8) sia soluzione dell'equazione (1), deve essere

$$\dot{A} = HA \ , \tag{10}$$

equazione che, con la condizione iniziale (9), determina univocamente la matrice $A(t)$ in funzione della matrice $H(t)$. Con la A così determinata, il vettore OP espresso da (8) soddisfa all'equazione (1) e alla condizione iniziale (7), e, stante il teorema di unicità, detta soluzione risulta unica. L'asserto è così completamente provato.

Posto $A = \det A$, esiste, stante (9), tutto un intorno di t_0 in corrispondenza al quale risulta $A \neq 0$. In detto intorno risulta quindi

$$\dot{A} = tr(\dot{A}\ A^{-1})\ A$$

e da (10) segue pertanto

$$\frac{\dot{A}}{A} = tr H \ . \tag{11}$$

Stante (1), l'equazione di continuità risulta espressa da

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} + tr H = 0 \ ,$$

che, confrontata con (11), dà luogo a

$$\mu A = \mu_0 \ , \tag{12}$$

dove si è posto $\mu(t_0) = \mu_0$ e si è tenuto presente (9).

L'espressione (12) permette di asserire che A si annulla soltanto

nel caso limite (eventuale) in cui la densità diventi infinita. Quindi in tutto l'intervallo (o in tutti gli intervalli) di tempo in cui risulta definita la funzione $\mu(t)$, risulta $A \neq 0$.

Da (10) si deduce poi

$$\ddot{A} = (\dot{H} + H^2) A \,. \tag{13}$$

4. Comunque considerato il riferimento naturale $\mathscr{T}_O$, rispetto a tale riferimento le sole forze che agiscono sull'elemento P di $\mathscr{U}$ sono la forza di trascinamento e le forze gravitazionali esercitate su P dagli altri elementi. Riferendo dette forze all'unità di massa [4] (forze specifiche), si ha quindi, indicando con f_O la forza specifica di trascinamento e con $g(P)$ il risultante delle forze gravitazionali specifiche:

$$\frac{d^2\, OP}{d\,t^2} = g(P) + f_O \,, \tag{14}$$

da cui segue subito:

$$f_O = - g(O) \,. \tag{15}$$

Stante però l'impossibilità di individuare, a partire dalla classe dei riferimenti naturali, un riferimento inerziale, la forza f_O risulta indeterminata, come indeterminato risulta, stante (15), il risultante $g(O)$ e quindi il risultante $g(P)$.

Sussistendo però l'eguaglianza (2), si ha che, pur essendo indeterminati $g(P)$ e f_O, è determinato il loro risultante, che, ricordando (14), risulta dato da

$$g(P) + f_O = (\dot{H} + H^2)\, OP \,. \tag{16}$$

Indicato detto risultante, con notazione conforme a (16), con $g(OP, t)$, si ha quindi, ricordando (15):

$$g(OP, t) = g(P) - g(O) \,, \tag{17}$$

$$g(OP, t) = (\dot{H} + H^2)\, OP \,. \tag{18}$$

---

(4) E' ovvio che la massa gravitazionale e la massa inerziale si ritengono identificate.

5. Supposto $\mathcal{U}$ in espansione e sussistendo (12), la funzione $\mu(t)$ risulta decrescente dall'istante in cui è iniziata l'espansione sino all'istante (se esiste) in corrispondenza al quale risulta $\dot{A} = 0$ e in detto intervallo di tempo (eventualmente infinito) risulta quindi una funzione invertibile di t, che si può pertanto esprimere in detto intervallo in funzione di μ. Stante (18), in detto intervallo si può pertanto scrivere

$$g(OP, t(\mu)) = F(\mu)\, OP \,, \qquad (19)$$

con

$$F(\mu) = \dot{H}(t(\mu)) + H^2\,(t(\mu))\,. \qquad (20)$$

La matrice $F(\mu)$ risulta continua non appena, in accordo con quanto già detto al n. 3, si ritenga continua la matrice $\dot{H}$. Le suddette considerazioni si possono ripetere per ogni altro (eventuale) intervallo in cui $\dot{A}$ è di segno costante e pertanto l'eguaglianza (19) sussiste, con $F(\mu)$ continua, in tutto l'intervallo corrispondente all'intervallo (infinito) in cui la matrice $\dot{H} + H^2$, intesa ovviamente come funzione di t, è continua.

Indicata con a l'accelerazione in senso *euleriano*, da (19) e dalla legge fondamentale della dinamica scritta rispetto al riferimento $\mathcal{T}_O$ segue quindi

$$a = F(\mu)\, OP\,. \qquad (21)$$

Osservando ora che a $g(P)$ e a $g(O)$ è applicabile il principio di sovrapposizione delle forze simultanee[5], stante (17) detto principio risulta applicabile anche a $g(OP, t)$, ossia, stante (19), a $F(\mu)\, OP$.

Pertanto, interpretando l'eguaglianza (21) in senso euleriano e posto

$$\mu = \sum_1^n{}_i\, \mu_i \quad (\mu_i > 0)$$

con l'intero n arbitrario, il principio di sovrapposizione delle forze simultanee implica

$$F(\mu) \equiv F(\sum_1^n{}_i\, \mu_i) = \sum_1^n{}_i\, F(\mu_i),$$

---

[5] Posto $\mu = \sum_1^n{}_i\, \mu_i$ $(\mu_i > 0)$ e indicati con $g_i(P)$ e $g_i(O)$ i risultanti delle forze esercitate da $\mathcal{U}$ su P e su O qualora, nell'istante t considerato, la densità di $\mathcal{U}$ fosse uguale a μ_i invece che a μ, il suddetto principio esprime che risulta, indipendentemente dal fatto che $g(P)$, $g_i(P)$, ecc. siano indeterminati:

$$g(P) = \sum_1^n{}_i\, g_i(P)\,, \qquad g(O) = \sum_1^n{}_i\, g_i(O)\,.$$

da cui segue agevolmente, stante la continuità di $F(\mu)$:

$$F(\mu) = -\frac{4}{3}\pi\mu K\,,$$

con la matrice $K = \|k_{ij}\|$ costante e dove, per comodità espositiva, si è posto in evidenza il fattore $-4\pi/3$.

Risulta pertanto, ricordando (20) e (18):

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4}{3}\pi\mu K\,, \tag{22}$$

$$g(OP, t) = -\frac{4}{3}\pi\mu K\, OP\,. \tag{23}$$

L'equazione (22) è l'*equazione di evoluzione* di $\mathcal{U}$.

La sostituzione di (22) in (2) dà luogo all'equazione del moto di P:

$$\frac{d^2\, OP}{d\, t^2} = -\frac{4}{3}\pi\mu K\, OP\,, \tag{24}$$

la quale, stante (22) e (2'), mantiene immutata la sua forma in ogni riferimento naturale.

La sostituzione di (22) in (13) dà poi luogo alla seguente forma per l'equazione di evoluzione:

$$\ddot{A} = -\frac{4}{3}\pi\mu K A\,,$$

ossia, ricordando (12):

$$\ddot{A} = -\frac{4}{3},\pi\mu_0\, K\frac{A}{A}\,. \tag{25}$$

6. Le forze a distanza che si esercitano tra gli elementi di $\mathcal{U}$, dipendendo oltre che dalle masse degli elementi, ossia dalla densità di $\mathcal{U}$, unicamente dalle loro distanze, sono conservative e pertanto, ricordando anche le considerazioni svolte al n. 4, segue che il risultante $g(OP, t)$ risulta essere il gradiente di una funzione reale $\phi(x^1, x^2, x^3, t)$, funzione definita ovviamente a meno di una costante additiva arbitraria. Risulta cioè, ricordando (23):

$$\text{grad}\,\phi = -\frac{4}{3}\pi\mu K\, OP\,, \tag{26}$$

e pertanto, stante la condizione

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^j \partial x^i},$$

e risultando

$$k_{ij} = -\frac{3}{4\pi\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j},$$

segue che la matrice K deve risultare simmetrica:

$$K = K^T . \tag{27}$$

Ne segue che il potenziale ϕ, ossia $g(OP, t)$, risulta completamente determinato [6] dalla conoscenza di $\mu(t)$ e dalle sei costanti

$$k_{ij} = k_{ji}$$

che individuano la matrice K.

Stante (27), da (22) segue che deve essere verificata la condizione

$$\dot{H} + H^2 = (\dot{H} + H^2)^T . \tag{28}$$

Da (26) segue inoltre, ovviamente, che ϕ soddisfa all'equazione di Poisson:

$$\Delta\phi = -4\pi k \mu , \tag{29}$$

dove si è posto

$$k = \frac{1}{3} tr K . \tag{30}$$

L'introduzione del potenziale ϕ permette di asserire che risulta, come subito segue da (24), (2), (26):

$$(\dot{H} + H^2)\, OP = \text{grad}\, \phi$$

ed è sostanzialmente sotto questa forma che l'equazione del moto di P è stata ottenuta da Heckmann e Schücking nel 1955. Però, a differenza della presente trattazione, dove si prova che il risultante $g(OP, t)$ deve soddisfare all'equazione di Poisson e per il quale anzi si stabili-

(6) Naturalmente a meno di un'inessenziale costante additiva che, imponendo ad esempio la condizione che ϕ si annulli per $P \equiv O$, si può assumere, rispetto al riferimento $\mathcal{T}_0$, uguale a zero.

sce che sussiste l'espressione (23), nella deduzione dei suddetti Autori si assume *a priori* che detto risultante deve soddisfare all'equazione di Poisson, alla quale vengono associate delle condizioni all'infinito che, non adeguatamente giustificate, presentano un alto grado di arbitrarietà e non lasciano affatto presumere che il potenziale ϕ debba essere tale da soddisfare proprio a (26).

7. Introdotto lo scalare R definito da

$$A = R^3 ,$$

le eguaglianze (11) e (12) diventano

$$tr H = 3 \frac{\dot{R}}{R} , \tag{31}$$

$$\mu R^3 = \mu_0 . \tag{32}$$

Ciò premesso, ricordate le posizioni (3), (4), introdotto il vettore ω definito da[7]

$$\omega_i = - \omega_{i+1\ i+2} \tag{33}$$

e posto

$$tr Q^2 = q^2 ,$$

da (22), ricordando (6), (5), (31), (32) e la posizione (30), segue

$$3 \frac{\ddot{R}}{R} = 2\omega^2 - q^2 - 4\pi k \frac{\mu_0}{R^3} , \tag{34}$$

dove con ω si è indicato il modulo di ω.

L'equazione (34) è dovuta a Heckmann e Schücking[8] che l'hanno stabilita assumendo come punto di partenza, come già si è ricordato, l'equazione di Poisson. Essa è l'analogo newtoniano dell'equazione che nell'ambito relativistico è dovuta a Raychaudhuri[9].

8. Si supponga per il momento che, in analogia al caso considerato in [7], § 3, risulti $Q = 0$. Ricordando (31), l'espressione (6) si riduce in tal caso a

$$H = \frac{\dot{R}}{R} I + \Omega ,$$

---

(7) E' ovvio che l'indice $i + l$ ($l = 1, 2$) va diminuito di 3 non appena esso supera 3.

(8) Cfr. [7], § 1. Si veda anche [17], 2.

(9) Cfr. [16], II; [17].

mentre risulta

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{R}}{R} I + \dot{\Omega} + 2 \frac{\dot{R}}{R} \Omega + \Omega^2 .$$

Ricordando la condizione (28), segue

$$\dot{\Omega} + 2 \frac{\dot{R}}{R} \Omega = 0 ,$$

da cui, ricordando la posizione (33), si ottiene

$$\omega_i R^2 = c_i , \tag{35}$$

con c_i costante, ossia la costanza della direzione di ω.

Scelto il sistema di coordinate con l'asse di x^3 avente la direzione e il verso di ω, la matrice $\dot{H} + H^2$ si riduce a forma diagonale e quindi, stante (22), con tale scelta del sistema di coordinate anche la matrice K si riduce a forma diagonale. In corrispondenza si ottengono le due equazioni

$$\frac{\ddot{R}}{R} - \omega^2 = -\frac{4}{3} \pi k_1 \mu , \quad \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4}{3} \pi k_2 \mu , \tag{36}$$

con k_1 e k_2 costanti.

Da (36) segue

$$\omega^2 = \frac{4}{3} \pi (k_1 - k_2) \mu , \tag{37}$$

eguaglianza che, tra l'altro, implica $k_1 > k_2$.

Supposto $k_1 > k_2$, il confronto di (32), (35), (37) comporta necessariamente la costanza di R, ossia, come subito segue dalla seconda delle equazioni (36), l'annullarsi di k_2, in quanto non è fisicamente ammissibile un modello in cui si annulli μ.

Comunque, essendo ora $H = \Omega$, in entrambi i casi risulta che, comunque si scelga P sull'asse x^3, la velocità di P risulta nulla rispetto a $\mathscr{T}_O$ e rispetto a ogni altro riferimento naturale con l'origine sul suddetto asse. In altri termini gli elementi di $\mathscr{U}$ che si trovano sull'asse x^3 risultano a riposo, ossia in equilibrio, rispetto a tutti i riferimenti naturali aventi l'origine sul suddetto asse. Questa evenienza, in contrasto con quanto indica l'osservazione astronomica, esprime che il fluido $\mathscr{U}$ avrebbe *comportamento statico* nella direzione dell'asse x^3, ossia che in detta direzione non si avrebbe espansione. In detta direzione, per il caso $k_2 = 0$, $\mathscr{U}$ si presenterebbe inoltre *instabile*.

9. Allo scopo anche di ulteriormente sottolineare l'efficacia del modo di procedere qui seguito, si esaminerà brevemente il caso in cui si ammetta l'intervento, anche se alquanto ipotetico e artificioso specialmente in cosmologia newtoniana [(10)], del cosiddetto termine cosmologico.

Con l'intervento di detto termine l'equazione (22) si modifica in [(11)]

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4}{3}\pi k \mu K + \frac{\Lambda}{3} I$$

e, sempre nell'ipotesi che si ammetta che risulti $Q = O$, le equazioni (36) si modificano nelle

$$\frac{\ddot{R}}{R} - \omega^2 = -\frac{4}{3}\pi k_1 \mu + \frac{\Lambda}{3}, \quad \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4}{3}\pi k_2 \mu + \frac{\Lambda}{3}.$$

Da esse segue ancora l'eguaglianza (37) che, supposto $k_1 > k_2$, implica anche ora la costanza di R, a differenza di quanto dedotto in [9]; [7], § 3; [10], 3; [11], Cap. IX, § 3. In altri termini, il modello ad espansione isotropa e rotazione rigida non può sussistere, indipendentemente dall'intervento del termine cosmologico.

Stante (32), segue poi, per il caso ora esaminato, $R = 1$ e dall'equazione (34), modificata con l'aggiunta di Λ, si ottiene

$$\Lambda + 2\,\omega^2 = 4\pi k \mu_0 ,$$

da cui, ritenendo $\Lambda = -4\pi k \mu_0$, si ottiene l'analogo newtoniano del modello di Gödel [(12)].

10. Stante l'eguaglianza (37) e tenendo presente quanto ora visto, si ha che il modello a rotazione rigida, indipendentemente dall'intervento del termine cosmologico, può sussistere se e solo se risulta $k_1 > k_2$. Infatti per $k_1 = k_2$, ossia non appena la matrice K si riduce a

$$K = k I , \tag{38}$$

l'eguaglianza (37) implica $\omega = 0$.

---

(10) Cfr. [1].

(11) Per la sua deduzione è sufficiente procedere con gli accorgimenti seguiti in [1], 6.

(12) Cfr. [6]; [9]; [7], § 3.

Si può quindi affermare che con K espressa da (38) non sono possibili per $\mathscr{U}$ nemmeno modelli a rotazione rigida [13], oltre che modelli a rotazione rigida ed espansione isotropa, indipendentemente dall'intervento del termine cosmologico.

Come subito segue da (24), è proprio alla matrice (38) che si riduce K nel caso in cui esista per il fluido $\mathscr{U}$ un riferimento naturale rispetto al quale l'accelerazione dell'elemento P, qualunque esso sia, risulti puramente radiale [14]. In tal caso le equazioni (22), (24) e (25) diventano, tralasciando ormai l'intervento del termine cosmologico:

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4}{3}\pi k \mu I , \tag{39}$$

$$\frac{d^2\, OP}{d t^2} = -\frac{4}{3}\pi k \mu\, OP , \tag{40}$$

$$\ddot{A} = -\frac{4}{3}\pi k \mu_0 \frac{A}{A} , \tag{41}$$

mentre l'equazione (34) conserva immutata la sua forma.

L'equazione (40), che conserva immutata la sua forma in ogni riferimento naturale e che è stata qui ottenuta partendo unicamente dalle ipotesi fatte su $\mathscr{U}$, è l'equazione esplicita del moto di P e si identifica con l'equazione che si sarebbe ottenuta assumendo che il riferimento $\mathscr{T}_O$ risulti inerziale, che le forze a distanza che si esercitano tra gli elementi di $\mathscr{U}$ siano espresse dalla legge di gravitazione universale e che la parte di $\mathscr{U}$ esterna alla sfera materiale di centro O e raggio $|OP|$ non dia contributo al moto di P. E' questo sostanzialmente il modo di procedere seguito in [13], [12], [14] [15], [4], ecc., ed è con questo modo di procedere che l'equazione di evoluzione (41) è stata ottenuta da Narlikar [16] e l'equazione (39) da Davidson e Evans [17]. Ponendosi nell'ipotesi che risulti

$$g(OP, t) = -\frac{4}{3}\pi k \mu\, OP ,$$

(13) Si veda anche [2], 5.

(14) E' a questo caso che si riduce il caso considerato in [2].

(15) Si veda al riguardo il lavoro esplicativo [15].

(16) Cfr. [14], 2 e [15]. Si veda anche [4], 2 (d).

(17) Si veda [3]; [4], 2 (c).

ossia nel caso considerato in questo n., in [4] Davidson e Evans provano, con considerazioni invero alquanto lunghe e laboriose, che non sono possibili quei modelli per i quali l'impossibilità è stata qui provata attraverso alcune brevi e dirette considerazioni.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALBANO G., GALLETTO D., *Sull'intervento del termine cosmologico in cosmologia newtoniana* (di prossima pubblicazione).

[2] BARBERIS B., GALLETTO D., *Caratterizzazione dei moti di un fluido che soddisfano a una certa proprietà del campo newtoniano*, Atti Accad. Sci. Torino, **115**, pp. 119-123 (1981).

[3] DAVIDSON W., EVANS A. B., *A Fresh Look at the Cosmological Singularity*, Nature Phys. Sci., **232**, pp. 29-31 (1971).

[4] DAVIDSON W., EVANS A. B., *Newtonian Universes Expanding or Contracting with Shear and Rotation*, Int. J. Theor. Phys., **7**, pp. 353-378 (1973).

[5] GALLETTO D., *Sui fondamenti della meccanica classica, della teoria newtoniana della gravitazione e della cosmologia newtoniana*, in "Atti del 3° Convegno Nazionale di Relatività Generale e Fisica della Gravitazione, Torino, 18-21 settembre 1978", Accademia delle Scienze, Torino, 1981; pp. 111-157.

[6] GÖDEL K., *An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation*, Rev. Modern Phys., **21**, pp. 447-450 (1949).

[7] HECKMANN O., SCHÜCKING E., *Bemerkungen zur Newtonschen Kosmologie.* I, Z. Astrophysik, **38**, pp. 95-109 (1955).

[8] HECKMANN O., SCHÜCKING E., *Bemerkungen zur Newtonschen Kosmologie.* II, Z. Astrophysik, **40**, pp. 81-92 (1956).

[9] HECKMANN O., SCHÜCKING E., *Ein Weltmodell der Newtonschen Kosmologie mit Expansion und Rotation*, Helv. Phys. Acta, Suppl. IV, pp. 114-115 (1956).

[10] HECKMANN O., SCHÜCKING E., *Newtonsche und Einsteinsche Kosmologie*, in: S. Flügge (ed.), Handbuch der Physik, **LIII**, Springer, 1959; pp. 489-519.

[11] MAVRIDÈS S., *L'Univers relativiste*, Masson, Paris, 1973.

[12] McCREA W. H., MILNE E. A., *Newtonian Universes and the Curvature of Space*, Quart. J. Math. (Oxford Ser.), **5**, pp. 73-80 (1934).

[13] MILNE E. A., *A Newtonian Expanding Universe*, Quart. J. Math. (Oxford Ser.), **5**, pp. 64-72 (1934).

[14] NARLIKAR J. V., *Newtonian Universes with Shear and Rotation*, Mon. Not. Roy. Astronom. Soc., **126**, pp. 203-208 (1963).
[15] NARLIKAR J. V., *On Newtonian Universes*, Mon. Not. Roy. Astronom. Soc., **131**, pp. 501-502 (1966).
[16] RAYCHAUDHURI A., *Relativistic Cosmology*. I, Phys. Rev., **98**, pp. 1123-1126 (1955).
[17] RAYCHAUDHURI A., *Relativistic and Newtonian Cosmology*, Z. Astrophysik, **43**, pp. 161-164 (1957).

Approccio geometrico alla supergravità e unificazione di interazioni fondamentali

R. D'Auria, P. Fré, T. Regge *

La comprensione attuale dei fenomeni a bassa energia nella Fisica delle particelle elementari sembra indicare che le teorie di campo con simmetria di gauge costituiscano uno schema praticabile per la descrizione delle interazioni fondamentali fra particelle elementari.

Anche se la teoria di gauge delle interazioni forti non ha ancora un fondamento teorico e sperimentale ben stabilito, così come avviene per la teoria di Glashow-Weinberg-Salam e per le teorie della Gravitazione, non c'è dubbio che essa fornisce un valido schema interpretativo sulla dinamica dei quark.

In questa situazione sembra logico chiedersi se le varie teorie di gauge esistenti non possano ricondursi ad un unico principio; più precisamente se le differenti simmetrie che caratterizzano le interazioni a bassa energia non siano che i frammenti d'una simmetria più elevata esistente ad energie considerevolmente più alte delle varie scale di energia che corrispondono all'intensità delle interazioni fra particelle.

Un primo passo in questa direzione è stato fatto con la teoria di gauge SU(2) ⊗ U(1) di Glashow-Weinberg-Salam che unifica le interazioni deboli ed elettromagnetiche ad energie dell'ordine di 10^2 Gev; il passo successivo consisterebbe nell'unificazione della teoria di gauge SU(3) delle interazioni forti (Cromodinamica) con la precedente. Il minimo gruppo semplice che contiene SU(3) ⊗ SU(2) ⊗ U(1) è SU(5); usando argomenti del gruppo di rinormalizzazione si trova che la scala di energie a cui si ha questa unificazione (grande unificazione) è dell'ordine di 10^{15} Gev.

---

* Istituto di Fisica Teorica, dell'Università di Torino.
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Torino.
Scuola di Specializzazione in Fisica Nucleare dell'Università di Torino.

Anche se si è assai lontani da una teoria realistica di grande unificazione è interessante notare che aluni modelli finora proposti spiegano semplicemente la quantizzazione della carica e l'angolo di Weinberg θ_w ; inoltre esse fanno previsioni ben precise su nuovi fenomeni fisici quali il decadimento del protone e le masse dei neutrini.

Poiché l'energia di unificazione di tali teorie è abbastanza prossima alla massa di Planck ($\sim 10^{19}$ Gev) ci si può legittimamente chiedere se sia corretto in tali teorie trascurare completamente la gravità; in effetti il passo successivo per l'unificazione di tutte le interazioni oggi note (superunificazione) consisterebbe nell'includere in tali schemi le teorie di gauge della gravitazione [(1)].

Le teorie di supergravità di cui discuteremo brevemente un aspetto in questo colloquio hanno come motivazione di base appunto la superunificazione. In tali teorie le simmetrie interne (gruppi di gauge di Yang-Mills) e le simmetrie spazio-temporali (gruppo di gauge di Poincarè) vengono unificate in unica struttura algebrica cosicché anche le simmetrie interne acquistano un significato geometrico che estende l'interpretazione geometrica della pura gravità.

Ciò che rende inoltre le teorie di supergravità assai interessanti è il fatto che esse posseggono un requisito basilare per una vera unificazione di tutte le interazioni; la possibilità di sistemare in un unico multipletto particelle di spin intero e semintero. Infatti i costituenti fondamentali della materia appartengono sia alla famiglia dei bosoni che dei fermioni.

Lo strumento matematico che permette di realizzare questa possibilità è un'estensione dell'algebra di Lie di un gruppo, detta algebra di Lie graduata. Un'algebra di Lie graduata è una struttura algebrica chiusa che contiene, accanto agli ordinari commutatori di un'algebra di Lie ordinaria, anche anticommutatori. Gli operatori che obbediscono a regole di anticommutazione costituiscono la parte dispari dell'algebra, mentre gli altri ne sono la parte pari. La presenza di anticommutatori caratteristica di cariche fermioniche e la struttura algebrica chiusa dell'algebra spiegano la possibilità di effettuare trasformazioni di simmetria che trasformano particelle appartenenti a diverse statistiche l'una nell'altra. Un esempio di algebra di Lie graduata è data dalla graduazione dell'algebra del gruppo di Poincarè:

$$[J_{ij}, J_{kl}] = -i(\eta_{ik} J_{jl} + \eta_{jl} J_{ik} - \eta_{il} J_{jk} - \eta_{jk} J_{il}) \qquad (1)$$

$$[J_{ij}, P_k] = -i(\eta_{ik} P_j - \eta_{jk} P_i)$$

$$[P_i, P_k] = 0$$

$$[J_{ij}, Q^A_\alpha] = (\Sigma_{ij})^\beta_\alpha \, Q^A_\beta \qquad (1)$$

$$[P_i \, Q^A_\alpha] = 0$$

$$\{Q^A_\alpha, Q^B_\beta\} = i(\gamma_i)_{\alpha\beta} \, P^i \, \delta^{AB}$$

ove le Q^A_α ($\alpha = 1, ..., 4; A = 1, ..., N$) costituiscono un insieme di N generatori dispari rappresentati da N spinori di Majorana (α è l'indice spinoriale). L'algebra (1) viene detta algebra di supersimmetria estesa di Poincarè ed A è un indice di simmetria interna; se $N = 1$ abbiamo la supersimmetria semplice o minima con una singola carica spinoriale Q_α (2).

Quando si cerca di realizzare una teoria di campo in cui la simmetria descritta dalla struttura (1) si manifesta come simmetria di gauge si è condotti naturalmente a un'estensione della teoria della gravitazione. Infatti se le cariche spinoriali diventano generatori di gauge così dev'essere per il generatore delle traslazioni spazio-temporali P^i e per i generatori delle trasformazioni di Lorentz J_{ij}. Poiché la gravità è la teoria di gauge del gruppo di Poincaré la teoria risultante sarà un'estensione della gravità ordinaria, detta supergravità.

Se c'è una sola carica spinoriale abbiamo la supergravità semplice che descrive l'interazione fra il gravitone (associato alle traslazioni) ed un campo di Rarita-Schwinger associato alla carica spinoriale Q_α.

Se esistono più cariche spinoriali Q^i_α ($i = 1, ..., N$) abbiamo più campi di spin 3/2 con un indice di simmetria interno e campi di spin inferiore e la supergravità si dice estesa.

Si può facilmente mostrare che multipletti dell'algebra di Poincarè graduata estesa con spin massimo $\leqslant 2$ esistono soltanto per $N \leqslant 8$. Il gruppo di simmetria interna è SO(N) o SU(N) globale.

La costruzione splicita di queste teorie mostra che esiste per $N \geqslant 4$ una struttura di simmetria interna assai più ricca dovuta alla presenza di campi scalari nei supermultipletti. In particolare per $N_{\max} = 8$ la simmetria interna è data da E_7 (globale) $\otimes$ SU(8) (locale), ma i campi di gauge di SU(8) non hanno termine cinetico e sono all'ordine più

basso espressioni bilineari nei campi scalari. E' stato suggerito che a livello quantistico i potenziali di gauge di SU(8) possano diventare dinamici con lo stesso tipo di meccanismo che si manifesta nei modelli CP(n). Se questo è vero, allora l'analisi del contenuto di particelle di SU(8) rivela che esso è abbastanza grande da poter includere tutti gli stati di quark, leptoni e bosoni di Higgs necessari per la fenomenologia attuale.[3]

Senza voler entrare in una discussione approfondita di questo soggetto ciò che emerge è che non è impossibile che la teoria di supergravità $N=8$ possa porsi come un serio candidato per una unificazione di tutte le interazioni. Accanto a queste proprietà di natura "fenomenologica" ce n'è un'altra che merita particolare attenzione per la teoria della gravitazione; le teorie di supergravità comportano a livello quantistico un miglioramento essenziale sulle proprietà ultraviolette della teoria di Einstein. In particolare si dimostra che la teoria $N=1$ è finita fino al secondo loop (ma non oltre). Un recentissimo risultato ha poi mostrato che la $N=8$ è *finita* fino al terzo "loop"; nulla si sa per ora sugli ordini superiori.

Ovviamente siamo ancora lontani dal poter supporre queste teorie come realistiche; al momento attuale la simmetria bosone-fermione presente nei supermultipletti non sembra affatto manifestarsi in natura ed il meccanismo di rottura spontanea per generare masse è solo parzialmente chiarito. Dal nostro punto di vista ci interessa però mettere in evidenza un altro punto di carattere teorico che non rende ancora pienamente soddisfacente la struttura formale di tali teorie.

Le trasformazioni di supersimmetria che legano tra loro i costituenti dei supermultipletti non hanno un significato gruppale ben preciso; esse non sono infatti trasformazioni di gauge del gruppo G la cui algebra è descritta dalle (1); l'algebra delle trasformazioni si chiude infatti soltanto se le equazioni del moto sono soddisfatte.[4][5][6]

La costruzione esplicita della Lagrangiana e delle corrispondenti trasformazioni di supersimmetria è in generale effettuata con un procedimento ad hoc ordine per ordine. D'altra parte l'estensione della teoria a livello quantistico richiede un gruppo di trasformazioni che si chiuda "off-shell" e nuovi campi debbono essere introdotti ad hoc nella teoria per la chiusura dell'algebra.[6] La comprensione della natura gruppale di questi "campi ausiliari" è oscura, mancando la struttura gruppale sottostante. Inoltre l'introduzione dei termini cinetici

per i campi di spin 1 del tipo

$$\sqrt{-g}\, F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}\, d^d x$$

richiede l'uso della metrica: ($F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}\, g^{\nu\sigma}\, F_{\rho\sigma}$) e pone quindi su un piano diverso il campo metrico del campo di spin 1; da questo punto di vista l'unificazione non è completa.

Queste ragioni sono sufficienti a far ritenere che debba esistere una formulazione delle teorie di supergravità in cui la struttura gruppale possa essere messa in evidenza in modo tale che le proprietà di simmetria risultino evidenti e che i vari campi appaiano come costituenti di un'unica entità geometrica. In questo caso parleremo di teoria geometrica. Nel prossimo paragrafo descriveremo brevemente questo tipo di approccio.

2. La struttura di gauge della teoria della gravitazione fu messa in luce per la prima volta da E. Cartan negli anni trenta, ma rimase per lo più sconosciuta alla maggioranza dei fisici. All'inizio degli anni sessanta, nel tentativo di riformulare la gravità Einsteiniana come una teoria di Yang-Mills, Utiyama e Kibble [7] dettero una formulazione della teoria sostanzialmente equivalente a quella di Cartan. Per avere una comprensione geometrica di quest'ultima premetteremo qualche breve cenno (senza pretesa di rigore) sul concetto di vierbein e connessione su una varietà differenziabile.[8]

Consideriamo un campo vettoriale di riferimenti su una varietà che per concretezza supporremo lo spazio-tempo quadridimensionale; su ogni piano tangente è definita una quaterna di vettori $\vec{e}_i$ che definisce il riferimento locale (riferimento anolonomo). Se la varietà è lo spazio-tempo le $\vec{e}_i$ costituiscono un riferimento localmente inerziale. Uno spostamento infinitesimo $d\vec{P}$ si potrà scrivere

$$d\vec{P} = V^i\, \vec{e}_i \tag{2.1}$$

ove le V^i saranno lineari nei differenziali delle coordinate x^μ della varietà:

$$V^i = V^i_{\cdot\mu}\, dx^\mu \tag{2.2}$$

Le 1-forme V^i sono dette Vierbein. Se nella (2.1) il riferimento è quello dei vettori tangenti alle linee coordinate (o olonomo) $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \vec{\partial}_\mu$

$$\vec{dP} = dx^\mu \, \vec{\partial}_\mu \tag{2.3}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \vec{\partial}_\mu &= V^i_\mu \, \vec{e}_i \\ \vec{e}_i &= V^\mu_i \, \vec{\partial}_\mu \quad (|V^\mu_i| \equiv |V^i_\mu|^{-1}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Le componenti delle Vierbein possono quindi anche interpretarsi come matrici che fanno passare dal sistema locale ortonormale a quello delle coordinate. Dato un vettore

$$A = A^i \, e_i \equiv A^\mu \, \partial_\mu \tag{2.5}$$

si ha quindi

$$\begin{aligned} A^i &= V^i_\mu \, A^\mu \\ A^\mu &= V^\mu_i \, A^i \end{aligned} \tag{2.6}$$

e così via.

Finora non è stato introdotto nessun concetto metrico. Supponiamo ora che nel piano tangente sia definita una metrica η_{ij} invariante sotto SO(1,3) e che i vettori $\vec{e}_i$ siano ortonormali: $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \eta_{ij}$. Si può allora valutare il ds^2:

$$ds^2 = \vec{dP}^2 = V^i_\mu \, V^j_\nu \, dx^\mu \, dx^\nu \, \eta_{ij} \tag{2.7}$$

e quindi il tensore metrico è dato da

$$g_{\mu\nu} = V^i_\mu \, V^j_\nu \, \eta_{ij} \tag{2.8}$$

Notare che una rotazione di gauge di SO(1,3) del riferimento $\vec{e}^{\,i}$: $\vec{e}'^{\,i} = A_j \, \vec{e}^{\,j}$ in ogni punto della varietà non altera la descrizione locale della geometria. Ricordiamo anche che la descrizione locale mediante Vierbein è essenziale per introdurre campi spinoriali sulla varietà; lo spinore è infatti definito solo rispetto a trasformazioni di SO(1,3) e non rispetto a GL(4) (trasformazioni lineari invertibili nello spazio tangente).

La connessione di Cartan sulla varietà può essere introdotta nel seguente modo: consideriamo il cambiamento $d\vec{e}^{\,i}$ che subisce il riferimento ortonormale $\vec{e}^{\,i}$ nel passaggio da un punto $P(x^\mu)$ ad un punto infinitamente vicino $P'(x^\mu + dx^\mu)$; si potrà scrivere

$$d\vec{e}_i = \omega^j_i \, \vec{e}_j \tag{2.9}$$

ed essendo ω_i^j una matrice infinitesima di rotazione si ha

$$\omega^{ij} = -\omega^{ji} \tag{2.10}$$

Inoltre ω^{ij} sarà lineare nei differenziali delle coordinate:

$$\omega^{ij} = \omega_\mu^{ij}\, dx^\mu \tag{2.11}$$

ed è facile vedere che sotto una trasformazione di gauge di SO(1,3) ($\vec{e}'^i = A_j \vec{e}^j$) la Vierbein e la connessione cambiano come segue:

$$\begin{aligned} V'^i &= (A^{-1})_j^{\ i} V^j \\ \omega'^{ij} &= A_k^i\, \omega^{kl} (A^{-1})_l^{\ j} + (dA\, A^{-1})^{ij} \end{aligned} \tag{2.12}$$

La torsione e la curvatura della varietà sono due forme a valori sull'algebra di Lie di Poincarè definite come segue:

$$\begin{aligned} R^i &= dV^i - \omega^{ij} \wedge V_j \\ R^{ij} &= d\omega^{ij} - \omega^{ik} \wedge \omega_k^{\cdot j} \end{aligned} \tag{2.13}$$

ove d, $\wedge$ denotano l'operatore di derivazione e di prodotto nel calcolo esterno delle forme differenziali. Le 2-forme $(R^{ij}, R^i) = R^A$ possono essere decomposte sia nella base delle coordinate (indici greci) sia in quella intrinseca della Vierbein (indici latini):

$$R^A = R^A_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu = R^A_{ij}\, V^i \wedge V^j \tag{2.14}$$

Dato un vettore nella base locale $\vec{A} = A^i \vec{e}_i$ abbiamo:

$$d\vec{A} = dA^j \vec{e}_j + A^i \omega^{ij} \vec{e}_j = (dA^j - \omega^{ji} A_i) \vec{e}_j \tag{2.15}$$

e la quantità

$$DA^i = dA^j - \omega^{ji} A_i \tag{2.16}$$

è la derivata covariante (di Lorentz) di A^j.

Per trovare la relazione esistente fra la connessione di Cartan e la connessione affine $\Gamma^\nu_{\rho\sigma}$ della relatività generale, basta osservare che quest'ultima è la connessione nel sistema delle coordinate ∂_μ.

Poiché $V_\mu^a \in GL(4)$ è la matrice di passaggio fra il sistema delle coordinate e quello intrinseco, utilizzando le (2.12) (valide anche per trasformazioni di GL(4)) si ottiene:

$$\Gamma^\nu_{\rho\sigma} = V^i_\rho\, \omega_i^{\cdot j}{}_{|\sigma}\, V_j^\sigma - \partial_\sigma V^i_\rho\, V^\nu_i \tag{2.17}$$

Si dimostra anche facilmente la seguente relazione fra la derivata covariante di Lorentz $D_\mu A^j$ definita in (2.16) e la derivata covariante $\nabla_\mu A^\nu$ di coordinate della relatività generale:

$$V^\nu D_\mu A^j = \nabla_\mu A^\nu \tag{2.18}$$

Infine il tensore di curvatura di Riemann è legato alla definizione (2.13) come segue:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = V^i_\mu \, V^j_\nu \, R_{ij\,|\,\rho\sigma} \tag{2.19}$$

e la Lagrangiana di Einstein-Cartan si scrive, nel formalismo intrinseco delle Vierbein:

$$L = \text{cost} \times R^{ab} \wedge V^c \wedge V^d \, \epsilon_{abcd} \tag{2.20}$$

E' facile provare l'equivalenza di questa Lagrangiana con l'usuale Lagrangiana

$$R \sqrt{-g} \, d^4x \tag{2.21}$$

con $R = R^{\mu\nu}_{\mu\nu}$ e g determinante di $g_{\mu\nu}$. Infatti, se si sviluppa la curvatura R^{ab} nella base delle 2-forme $V^k \wedge V^l$ si ottiene:

$$R^{ab}_{kl} \; V^k \wedge V^l \wedge V^c \wedge V^d \, \epsilon_{abcd} \tag{2.22}$$

da cui si ha:

$$\begin{aligned} &= R^{ab}_{kl} \, \epsilon^{klcd} \, \epsilon_{abcd} \, \det V \, d^4x \\ &= 4 \, R^{ab}_{ab} \, \det V \, d^4 x \end{aligned} \tag{2.23}$$

e poiché $R^{ab}_{ab} = R^{\mu\nu}_{\mu\nu}$ e $(\det V)^2 = ||g||$ l'espressione trovata coincide con la (2.21).

Esaminiamo ora quali sono le caratteristiche della Lagrangiana (2.20).

a) *Struttura Gruppale.*

I campi che entrano nella Lagrangiana costituiscono un multipletto della rappresentazione aggiunta del gruppo di Poincarè ISO(1,3):

$$\mu^A = \begin{pmatrix} \omega^{ab} \\ V^a \end{pmatrix}; \quad \mu = \mu^A \, T_A = \omega^{ab} \, J_{ab} + V^a \, P_a \tag{2.24}$$

tuttavia l'azione è invariante soltanto rispetto al sottogruppo di gauge H=SO(1,3) e non rispetto a traslazioni di gauge con parame-

metro ϵ^a:

$$\begin{aligned} \delta V^a &= D\epsilon^a \\ \delta \omega^{ab} &= 0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Questa è una differenza drastica rispetto a teorie tipo Yang-Mills ove l'azione è gauge invariante rispetto a tutto il gruppo G la cui algebra di Lie determina la rappresentazione dei potenziali.

b) Oltre all'invarianza locale di Lorentz la teoria è automaticamente invariante sotto trasformazioni di coordinate arbitrarie, essendo essa costruita solo con le forme ω^{ab}, V^a, l'operatore "d" di differenziazione ed il prodotto "wedge" tra forme.

c) La teoria è essenzialmente una teoria al prim'ordine poiché i campi ω^{ab} e V^a sono indipendenti; nessun vincolo viene imposto a priori sulla geometria dello spazio-tempo, come avviene nell'usuale formalismo ove la torsione R^a viene posta uguale a zero in modo da determinare un vincolo tra la connessione e la Vierbein. Eseguendo la variazione δV^a e $\delta\omega^{ab}$ si ottengono le seguenti equazioni del moto

$$\begin{aligned} R^a \wedge V^b \epsilon_{abcd} &= 0 \\ R^{ab} \wedge V^c \epsilon_{abcd} &= 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

dalla prima delle quali segue facilmente: $R^a = 0$.

Utilizzando la (2.13) si può allora esprimere ω^{ab} in termini della Vierbein nel seguente modo:

$$\begin{gathered} \omega_{\lambda\rho|\sigma} = - c_{\lambda\rho\sigma} - c_{\rho\sigma\lambda} + c_{\sigma\lambda\rho} \; ; \quad \omega_{\lambda\rho|\sigma} = V_{a|\lambda} V_{b|\rho} \omega^{ab}_{\sigma} \\ c_{\lambda\rho\sigma} = \frac{1}{2} V_{a|\lambda} (\partial_\rho V^a_\sigma - \partial_\sigma V^a_\rho) \end{gathered} \tag{2.27}$$

Questa relazione è analoga a quella che nel formalismo usuale determina il simbolo di Christoffel in funzione di $g_{\mu\nu}$; nel formalismo di Cartan essa è una conseguenza del principio variazionale. Sostituendo nella seconda delle (2.26), che è un'equazione del 1° ordine in ω^{ab}, si ottiene un'equazione di propagazione del 2° ordine in V^a_μ che coincide con l'equazione di Einstein nel vuoto:

$$R^{\mu\cdot}_{\nu\cdot} - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu R = 0 \tag{2.28}$$

Notiamo ora un'altra cosa interessante: nelle equazioni (2.26) non c'è alcun riferimento alle dimensioni dello spazio su cui le forme ω^{ab} e V^a sono definite. Possiamo quindi supporre che il potenziale $\mu^A \equiv (\omega^{ab}, V^a)$ sia definito su una varietà che contiene lo spazio-tempo M^4; la scelta più naturale è quella di prendere μ^A come definito sulla varietà del gruppo di Poincarè stesso. Lo spazio-tempo è allora (localmente):

$$M^4 \equiv \frac{I\,\mathrm{SO}(1,3)}{\mathrm{SO}(1,3)} \tag{2.29}$$

Qual'è il vantaggio di questa estensione? Essendo la varietà il gruppo di Poincarè a 10 parametri (x^μ, η^{ab}) una base locale di riferimenti è costituito dalla "Zehn-bein" $\mu^A \equiv (\omega^{ab}, V^a)$; le ω^{ab} e le V^a sono esattamente sullo stesso piano. Il multipletto aggiunto delle forme di curvatura $R^A = (R^{ij}, R^i)$, sviluppato nella base delle μ^A ha ora la forma generale:

$$R^A = R^A_{BC}\, \mu^B \wedge \mu^C = R^A_{ij}\, V^i \wedge V^j + 2\, R^A_{(ab),i}\, \omega^{ab} \wedge V^i + \\ + R^A_{(ab),(cd)}\, \omega^{ab} \wedge \omega^{cd} \tag{2.30}$$

Il gruppo G di Poincarè acquista una struttura di fibrato con fibra H il gruppo di Lorentz, e spazio base $G/H = M^4$ (identificabile con lo spazio-tempo), cioè ω^{ab} e V^a acquistano il semplice significato geometrico di connessione di Lorentz e sistema locale su M^4 se e solo se:

$$R^A_{(ab),i} = R^A_{(ab)(cd)} = 0 \tag{2.31}$$

In questo caso infatti ω^{ab} e V^a dipendono dai parametri di Lorentz η^{ab} solo attraverso la trasformazione di gauge (2.25). Ora si verifica facilmente che le (2.31) seguono dalle equazioni del moto (2.26); quindi la struttura di fibrato della teoria è una conseguenza del principio variazionale se il potenziale è definito su tutto G.[(9)]

Supergravità. La più semplice estensione dell'azione di Einstein-Cartan consiste nel considerare un potenziale μ^A nella rappresentazione aggiunta dell'algebra di Poincarè graduata (1); in questo caso:

$$\mu^A = \omega^{ab}\, J_{ab} + V^a\, P_a + \bar{\psi}\, Q \tag{3.1}$$

ove $\psi \equiv \psi_\mu \, dx^\mu$ è una 1-forma spinoriale di Majorana che rappresenta il campo di gauge associato ai generatori Q_α. Per ciò che segue è necessario notare che due 1-forme spinoriali χ, φ commutano: $\chi \wedge \varphi = \varphi \wedge \chi$.

Associato al multipletto aggiunto $(\omega^{ab}, V^a, \psi^\alpha)$ possiamo introdurre le 2-forme di curvatura a valori nell'algebra di Lie (graduata):

$$\begin{aligned} R^{ab} &= d\omega^{ab} - \omega^{ac} \wedge \omega_c{}^b \\ R^a &= DV^a - \frac{i}{2} \psi \wedge \gamma^a \psi \\ \rho^\alpha &= D\psi^\alpha \end{aligned} \tag{3.2}$$

ove le derivate covarianti di Lorentz sono date da:

$$\begin{aligned} DV^a &= dV^a - \omega^{ab} \wedge V_b \\ D\psi &= d\psi + \frac{i}{2} \omega^{ab} \wedge \Sigma_{ab} \psi \end{aligned} \tag{3.3}$$

γ^α sono le ordinarie matrici di Dirac e $\Sigma_{ab} \equiv \frac{i}{4} [\gamma_a, \gamma_b]$.

Ci chiediamo ora se è possibile scrivere una teoria che generalizzi la teoria di Einstein e che descriva consistentemente l'accoppiamento del campo di gauge del gravitone V^a_μ e del campo di gauge ψ^ν_μ della supersimmetria. La risposta a questa richiesta è affermativa e la azione della corrispondente teoria si scrive (10)(11)(6)

$$L = \quad (R^{ab} \wedge V^c \wedge V^d \epsilon_{abcd} + 4 \bar{\rho} \gamma_a \gamma_5 \wedge \psi \wedge V^a) \tag{3.4}$$

da cui si deducono le equazioni de moto variando V^a, ω^{ab} e ψ^α

$$\begin{aligned} &\epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge V^c + 2 \bar{\psi} \wedge \gamma_5 \gamma_d \rho = 0 \\ &2 \gamma_5 \gamma_a \rho \wedge V^a - \gamma_5 \gamma_a \psi \wedge R^a = 0 \\ &\epsilon_{abcd} R^c \wedge V^d = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Queste equazioni non contengono alcuna inconsistenza del tipo di quella messa in luce da Velo e Zwanzinger nello studio dell'accoppiamento di spin maggiori di 1. Infatti le identità di Bianchi sulle curvature del gruppo di Poincarè graduato assicurano la consistenza del

sistema. Dalla terza delle (3.5) segue $R^c = 0$ e a causa della diversa definizione della torsione nel caso del gruppo di Poincarè graduato, la soluzione per la connessione ω^{ab} dipende, in questo caso, non solo dalla Vierbein ma anche da termini bilineari nei gravitini:

$$\begin{aligned} \omega_{\lambda\rho|\sigma} &= \omega_{\lambda\rho|\sigma}(\psi = 0) \\ &+ \frac{i}{4}(\bar{\psi}_\rho \gamma_\lambda \psi_\sigma + \psi_\sigma \gamma_\rho \psi_\lambda + \bar{\psi}_\rho \gamma_\sigma \psi_\lambda - (\lambda \leftrightarrow \rho)) \end{aligned} \tag{3.6}$$

ove $\omega_{\lambda\rho|\sigma}(\psi = 0)$ è data dalla (2.27).

La teoria è invariante per trasformazioni locali di Lorentz e per trasformazioni di coordinate come nel caso della gravità pura; tuttavia essa possiede un'ulteriore invarianza detta supersimmetria locale, che non è una trasformazione di gauge associata alle cariche Q_α; la legge di trasformazione è la seguente:

$$\begin{aligned} &\delta\omega^{ab} = V^m (\epsilon^\alpha B^{ab}_{\alpha m} + \delta^{[a}_m B^{b]n}_n) \\ &\delta V^a = \bar{\epsilon}\gamma^a \psi \\ &\delta\psi = D\epsilon \\ &(B^{ab}_{\alpha m} = \epsilon^{abcd}(\gamma_5 \gamma_m)_{\alpha\beta}(D\psi^\alpha)_{cd}) \end{aligned} \tag{3.7}$$

ove ϵ è un parametro spinoriale.

Il commutatore di due trasformazioni (3.7) si chiude inoltre solo se le equazioni del moto della teoria sono soddisfatte. Com'è possibile dare un'interpretazione geometrica a queste invarianze?

La chiave per l'interpretazione consiste nuovamente nel definire la 1-forma $\mu^A \equiv (\omega^{ab}, V^a, \psi^\alpha)$ sulla varietà del gruppo di Poincarè graduato; il dominio di integrazione nella (3.4), essendo la Lagrangiana una 4-forma, è un'ipersuperficie quadridimensionale identificabile con lo spazio-tempo e immersa nel gruppo.

Le 1-forme $\mu^A \equiv (\omega^{ab}, V^a, \psi^\alpha)$ costituiscono un riferimento locale sulla varietà del gruppo e le Vierbein ordinarie V^a sono il riferimento locale sulla sottovarietà dello spazio-tempo. Le curvature $R^A \equiv (R^{ab}, R^a, \rho^\alpha)$ scritte nella base delle 2-forme $\mu^A \wedge \mu^B$ hanno la forma:

$$\begin{aligned} R^A &= R^A_{FG}\, \mu^F \wedge \mu^G \\ &= R^A_{(ab)G}\, \omega^{ab} \wedge \mu^G + R^A_{\alpha G}\, \psi^\alpha \wedge \mu^G + R^A_{ij}\, V^i \wedge V^j \end{aligned} \tag{3.8}$$

Soltanto le componenti R^A_{ij} sono componenti sullo spazio-tempo.

Dalle equazioni del moto, che sono equazioni lineari nelle componenti delle curvature $R^{A}_{.FG}$ seguono le condizioni:

$$\begin{aligned} &R^A_{(ab),G} = 0 \\ &R^A_{\alpha G} = C^{A,B}_{\alpha G,ij}\, R^B_{ij} \end{aligned} \qquad (3.9)$$

ove le $C_{\alpha G,ij}$ sono delle costanti esplicitamente calcolabili.

Come abbiamo visto nel caso della gravità pura la prima condizione assicura che ω^{ab} è una connessione sul fibrato principale con spazio base G/H, (G = Poincarè graduato, H = Lorentz) e fibra H.

I potenziali dipendono quindi soltanto dalle coordinate di G/H (superspazio) (x^μ, θ^α) ove le x^μ sono coordinate bosoniche associate alle traslazioni e θ^α coordinate fermioniche associate alle trasformazioni di supersimmetria Q_α.

La seconda condizione ci permette di interpretare la teoria solo sullo spazio-tempo (definito da $\theta^\alpha = 0$) e di capire l'origine delle trasformazioni (3.7). Supponiamo infatti di effettuare una trasformazione di coordinate su tutto il gruppo, di parametro infinitesimo ϵ^A. Il cambiamento in forma dei potenziali è dato dalla seguente equazione:[10]

$$\delta\mu^A = \nabla\epsilon^A - 2\,\mu^F\,\epsilon^G\,R^{A}_{.FG} \qquad (3.10)$$

($\equiv$ derivata covariante rispetto al gruppo G) e questa non è ovviamente una simmetria "off-shell" della teoria, essendo la azione un integrale sullo spazio tempo che è una sottovarietà di G. Se $\epsilon^A \equiv \epsilon^{ab}$ la condizione (3.7) porte nuovamente $\delta\mu^A = \nabla\epsilon^A$, cioè una trasformazione di gauge locale di SO(1,3). Se $\epsilon^A \equiv \epsilon^\alpha$, con ϵ^α spinore di Majorana associato alle trasformazioni generate dalle Q_α, $\delta\mu^A$ può essere espresso in termini delle sole componenti delle curvature sullo spazio-tempo, R^A_{ij}, utilizzando la (3.9). Poiché le curvature R^A_{ij} contengono i potenziali μ^A e le loro derivate $V^\mu_i\,\partial_\mu\,\mu^A$ solo sullo spazio-tempo M^4, la trasformazione (3.7) può essere interpretata come una simmetria "on-shell" su M^4; sostituendo l'espressione esplicita (3.9) data dalle equazioni del moto nella (3.10) con $\epsilon^A \equiv \epsilon^\alpha$, si ottengono appunto le trasformazioni di supersimmetria locale (3.7).

Notiamo anche che se si vuole far sì che la supersimmetria locale sia valida anche off-shell è necessario non utilizzare l'equazione del

moto (3.5) e le componenti $R_{\alpha G}$ delle curvature sono indispensabili per la chiusura dell'algebra. Queste componenti sono i campi ausiliari della supergravità e sono indispensabili per l'estensione quantistica della teoria.

Le teorie della gravità e della supergravità che abbiamo brevemente descritto sono teorie puramente geometriche nel senso che tutti i campi costituiscono, al prim'ordine, un multipletto nella rappresentazione aggiunta del gruppo e la Lagrangiana è costruita utilizzando soltanto le forme differenziali e le operazioni del calcolo esterno, ciò che rende automatica l'invarianza sotto trasformazioni di coordinate. Notare che questo principio geometrico esclude a priori la presenza nella Lagrangiana di termini cinetici di spin 1:

$$\sqrt{-g}\, F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu} \equiv F \wedge {}^*F \tag{3.11}$$

ove ${}^*F_{\nu\mu} = \epsilon_{\nu\mu\rho\sigma}\, F^{\rho\sigma}$ perché l'operatore di Hodge dipende dalla metrica e dalla dimensionalità dello spazio-tempo.

Ci si può allora chiedere com'è possibile inglobare in teorie di supergravità più elevate bosoni di gauge senza distruggere il carattere geometrico della Lagrangiana. La risposta è che i termini cinetici di spin 1 possono venir generati nel passaggio dal 1° al 2° ordine della teoria, cioè risolvendo esplicitamente l'equazione che esprime la connessione ω^{ab} in termini degli altri campi.

Vediamo ora se è possibile estrarre dei principi costruttivi per Lagrangiane geometriche servendosi degli esempi precedenti. Supporremo arbitrarie le dimensioni d dello spazio-tempo. E' infatti possibile, con la tecnica di riduzione dimensionale (che generalizza il passaggio della Klein-Kaluza da 5 a 4 dimensioni), interpretare una supergravità semplice (una sola carica spinoriale Q_α) in $d > 4$ dimensioni come una supergravità estesa (N cariche Q_α) in 4 dimensioni.

Scegliamo un supergruppo G che contenga il gruppo di Poincarè graduato (semplice) in d dimensioni e consideriamo una 1-forma nella rappresentazione aggiunta dell'algebra di Lie di G (potenziale di gauge) definita su tutta la varietà G:

$$\mu^A = \mu^A_M\, dy^M \tag{3.12}$$

con y^M parametri di G. Definiamo le 2-forme di curvatura R^A associate a μ^A:

$$R^A = d\,\mu^A + \frac{1}{2} C^{\ A}_{\cdot BC}\, \mu^B \wedge \mu^C \tag{3.13}$$

con $C^{A}_{\cdot BC}$ costanti di struttura di G. Le Lagrangiane della gravità e supergravità ordinaria sono lineari nelle curvature R^A,

$$L \sim R^A \wedge \nu_A \tag{3.14}$$

con

$$R^A = \begin{pmatrix} R^{ab} \\ R^a \end{pmatrix} \qquad \nu_A = \begin{pmatrix} \epsilon_{abcd}\, V_c \wedge V^d \\ 0 \end{pmatrix} \; ;$$

$$R^A = \begin{pmatrix} R^{ab} \\ R^a \\ \rho \end{pmatrix} \qquad \nu_A = \begin{pmatrix} \epsilon_{abcd}\, V^c \wedge V^d \\ 0 \\ 4\, \bar{\psi} \wedge \gamma_5\, \gamma_a\, V^a \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

rispettivamente. In generale dobbiamo aspettarci che le Lagrangiane debbano essere dei polinomi nelle curvature,

$$L = \Lambda + R^A \wedge \nu_A + R^A \wedge R^B \wedge \nu_{AB} + \ldots \tag{3.16}$$

ove Λ, ν_A, ν_{AB} ... sono polinomi nei potenziali μ^A a coefficienti costanti (assenza di campi esterni). L'ordine del polinomio è fissato dalle dimensioni dello spazio-tempo su cui si integra. (In $d = 4$ potremmo avere termini quadratici $R^A \wedge R^B \wedge \nu_{AB}$, ma essi risultano tutti divergenze pure; il termine d'ordine zero nelle curvature è necessario nella versione delle teorie con termine cosmologico).

Il problema di fissare la Lagrangiana si riduce quindi a quello di fissare i coefficienti dei polinomi:

$$\begin{aligned} \Lambda &= C_{K_1 \ldots K_d}\, \mu^{K_1} \wedge \ldots \wedge \mu^{K_d} \\ \nu_A &= C_{A K_1 \ldots K_{d-2}}\, \mu^{K_1} \wedge \ldots \wedge \mu^{K_{d-2}} \\ \nu_{AB} &= C_{ABK_1 \ldots K_{d-4}}\, \mu^{K_1} \wedge \ldots \wedge \mu^{K_{d-4}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3.17}$$

In tutte le teorie finora costruite risulta che la Lagrangiana è univocamente fissata se vengono imposte le seguenti richieste basilari:

a) invarianza di gauge di Lorentz;

b) esistenza della soluzione "vuoto": $R^A = 0$;

c) meccanismo della "reonomia" visto in supergravità: tutte le componenti delle curvature sul gruppo sono esprimibili in funzione delle

componenti sullo spazio-tempo. Questo requisito è indispensabile perché la teoria originariamente scritta sul gruppo sia interpretabile sullo spazio-tempo.[11]

Le richiesta a), b), sono direttamente implementabili sulla Lagrangiana utilizzando la nozione di coomologia di Chevalley del gruppo e ne limitano fortemente la struttura.[11] La richiesta c) fissa poi i parametri liberi rimasti analizzando le equazioni algebriche sulle componenti delle curvature $R^{A}_{\cdot BC}$ derivate dal principio variazionale.

Si può dimostrare ad esempio che queste richieste fissano in modo unico i polinomi (3.15) e quindi le Lagrangiane della gravità e supergravità ordinaria. Lo stesso avviene per teorie più complesse come la teoria $N = 2$ in 5 dimensioni (equivalente ad una $N = 2$ in $d = 4$ accoppiata geometricamente a "materia" di Yang-Mills con gruppo SO(2)).[12]

Se si analizza il contenuto minimo di campi che deve essere presente nella teoria in $d = 5$ perché il multipletto risultante appartenga ad una rappresentazione della supersimmetria (ugual numero di gradi di libertà fisici bosonici e fermionici), si trova che in $d = 5$, oltre alla fünfbein V^{a}_{μ} (gravitone) ed allo spin 3/2 (complesso) ξ_{μ} deve essere presente un campo elettromagnetico B_{μ}. Il gruppo che contiene nella rappresentazione aggiunta questo multipletto di campi (oltre la connessione) risulta essere $\overline{SU(2,2/1)}$, la graduazione del gruppo $\overline{SU(2,2)} \sim ISO(1,4)$. Il multipletto aggiunto o potenziale è dunque

$$\mu^{A} \equiv (\omega^{ab}, V^{a}, B, \xi, \bar{\xi}) \tag{3.18}$$

e le corrispondenti curvature, definite da

$$R^{A} = d\,\mu^{A} + \frac{1}{2} C^{A}_{BC}\, \mu^{A} \wedge \mu^{c} \tag{3.19}$$

con $C_{\cdot BC}$ costanti di struttura di $\overline{SU(2,2/1)}$, hanno la forma esplicita

$$\begin{aligned} R^{ab} &= d\,\omega^{ab} - \omega^{ac} \wedge \omega_{c}^{\cdot\, b} \\ R^{a} &= D V^{a} - \frac{i}{a}\, \bar{\xi}\, \Gamma^{a} \wedge \xi \\ R^{\otimes} &= dB - i\,\bar{\xi} \wedge \xi \\ \rho &= D\xi \qquad (\bar{\rho} = \rho^{\dagger}\, \Gamma_{0}) \end{aligned} \tag{3.20}$$

ove Γ^a sono matrici di Dirac in $d = 5$ e

$$\begin{aligned} DV^a &= dV^a - \omega^{ab} \wedge V_b \\ D\xi &= d\xi + \frac{i}{2} \omega^{ab} \wedge \Sigma_{ab} \, \xi \end{aligned} \qquad (3.21)$$

sono le derivate covarianti di Lorentz.

L'azione viene costruita scrivendo il più generale polinomio nelle curvature R^A che sia una 5-forma ed integrando su una varietà a 5 dimensioni da identificarsi come lo spazio-tempo immerso nel gruppo $\overline{SU(2,2/1)}$ su cui sono definiti i potenziali

$$S = \text{cost}\, x \int_{M_5} (\Lambda + R^A \wedge \nu_A + R^A \wedge R^B \wedge \nu_{AB}) \qquad (3.22)$$

ove

$$\Lambda, \nu_A, \nu_{AB} \qquad (3.23)$$

sono polinomi nei potenziali a *coefficienti costanti* (non ci sono quindi campi esterni nella teoria).

Applicando i criteri a), b) e c) sopra citati si ottiene la seguente Lagrangiana

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{1+\eta}{2} \, \bar{\xi} \wedge \xi \wedge \bar{\xi} \, \Gamma^a \wedge \xi \wedge V^a - \frac{1}{2} \bar{\xi} \wedge \xi \wedge \bar{\xi} \wedge \xi \wedge B \\ & + R^{ab} \wedge \frac{1}{3} \epsilon_{abijk} V^i \wedge V^j \wedge V^k + \eta \, V_a \wedge V_b \wedge B \; + \\ & + R^a \wedge \{ i\eta \bar{\xi} \wedge \Gamma_a \, \xi \wedge B + i(1-\eta) \, \bar{\xi} \wedge \xi \wedge V^a \} \; + \\ & + R^{\otimes} \wedge \frac{i}{2} \bar{\xi} \wedge \xi \wedge B - \frac{i}{3} (3+\eta) \, \bar{\xi} \, \Gamma_a \wedge \xi \wedge V^a \; + \\ & + 2 (\bar{\rho} \wedge \Sigma_{ab} \, \xi + \bar{\xi} \wedge \Sigma_{ab} \, \rho) \wedge V^a \wedge V^b \\ & + \frac{1}{4} R^{\otimes} \wedge R^{\otimes} \wedge B + \eta \, R^a \wedge R_a \wedge B \end{aligned} \qquad (3.24)$$

ove il parametro η può assumere il valore ± 1. Come conseguenza delle condizioni imposte, la Lagrangiana risulta invariante di gauge an-

che rispetto all'U(1) elettromagnetico, di cui $B = B_\mu \, dx^\mu$ è la connessione.

Abbiamo dunque due possibili Lagrangiane al 1° ordine che descrivono in maniera geometrica ed unificata l'interazione dei campi di gauge di spin 2, 3/2, 1. A causa dell'imposizione c) la teoria è interpretabile sullo spazio-tempo a 5 dimensioni e determinando esplicitamente le costanti delle relazioni (3.7) è immediato scrivere le trasformazioni di supersimmetria locale della teoria sostituendo la (3.9) nella (3.10). Si ottiene

$$\delta V_\mu = -\frac{i}{2} (\bar{\epsilon}\, \Gamma^i \xi_\mu - \bar{\xi}_\mu \Gamma^i \epsilon)$$

$$\delta B_\mu = i(\bar{\epsilon}\, \xi_\mu - \bar{\xi}_\mu \epsilon)$$

$$\delta \xi_\mu = D_\mu (\overset{\circ}{\omega})\, \epsilon + \frac{i}{2} b_{\rho\sigma|\mu}\, \Sigma^{\rho\sigma} + \tag{3.25}$$

$$+ \quad \frac{1}{2} \Gamma^\rho \, F_{\rho\mu} - \frac{i}{8} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma\tau}\, \hat{F}^{\nu\rho}\, \Sigma^{\sigma\tau}\, \epsilon$$

ove $$\hat{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) - \frac{i}{2} \bar{\xi}_\mu \xi_\nu$$

ove la connessione ω^{ab} è stata risolta esplicitamente in termini degli altri campi presenti nella teoria (passaggio al secondo ordine):

$$\omega^{ab}_\mu = \overset{\circ}{\omega}{}^{ab}_\mu + b^{ab}_\mu + \frac{i}{4} V^a_\lambda\, V^b_\nu\, \epsilon^{\lambda\nu}_{\mu\rho\sigma}\, F^{\rho\sigma}$$

$$\overset{\circ}{\omega}{}^{ab}_\mu \equiv (2.27) \tag{3.26}$$

$$b^{ab} = -\frac{i}{4} \{(\bar{\xi}_\mu\, \Gamma_\lambda\, \xi_\nu + \bar{\xi}_\lambda\, \Gamma_\nu\, \xi_\mu + \bar{\xi}_\lambda\, \Gamma_\mu\, \xi_\nu) - [\lambda \leftrightarrow \nu]\}\, V_{a|\lambda}\, V_{b|\nu}$$

Notiamo infine che inserendo questa espressione per ω^{ab} nelle curvature presenti nella Lagrangiana si genera esplicitamente il termine cinetico di spin 1 $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ come anticipato; la Lagragiana al 2° ordine sullo spazio-tempo ha infatti la seguente forma:

$$
\begin{aligned}
L = \; & 4\,R(\bar{\omega}) - \frac{3}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 3\,i F_{\mu\nu} \bar{\xi}^{\mu} \xi^{\nu} + \frac{3}{2} \bar{\xi}_{\mu} \xi_{\nu} \bar{\xi}^{\mu} \xi^{\nu} \quad \det V \\
& + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} B_{\tau} + \frac{3}{2} i F_{\mu\nu} \bar{\xi}_{\rho} \Gamma_{\sigma} \xi_{\tau} + \bar{\xi}_{\mu} \xi_{\nu} \xi_{\rho} \Gamma_{\sigma} \xi_{\tau} \\
& + 2\,D(\bar{\omega}) \xi_{\nu} \Sigma_{\sigma\tau} \xi_{\rho} + 2\, \bar{\xi}_{\rho} \Sigma_{\sigma\tau} D_{\mu}(\bar{\omega}) \xi_{\nu} \quad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau}
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

ove $\omega^{ab} = \mathring{\omega}^{ab} + b^{ab}$; $F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} B_{\nu} - \partial_{\nu} B_{\mu})$

Notiamo che al secondo ordine la Lagrangiana è indipendente da η. Ciò significa che esistono due diverse teorie al primo ordine che hanno la stessa versione al secondo ordine. Ciò può avere conseguenze interessanti a livello quantistico.

4. La situazione concettuale e l'interpretazione geometrica delle teorie di supergravità esistenti sembra essere ben stabilita dall'approccio brevemente discusso in alcuni casi precedentemente. E' possibile mediante questo approccio ottenere nuovi risultati o risolvere i problemi esistenti nella versione non geometrica al 2° ordine delle teorie già esistenti?

Uno di questi problemi è la determinazione dei campi ausiliari. L'approccio geometrico è estremamente potente per la determinazione dei campi ausiliari della teoria. Infatti la conoscenza gruppale della teoria "on-shell" permette di ottenere in maniera semplice i campi ausiliari imponendo nelle identità di Bianchi solo quelle relazioni tra componenti delle curvature sul gruppo che non implicano le equazioni del moto della teoria al 2° ordine.

Lo scopo ultimo sarebbe quello di ottenere i campi ausiliari della teoria in $d = 11$ (equivalente per riduzione dimensionale alla $d = 4$, $N = 8$). E' questo uno dei problemi attualmente in studio.

Un altro problema che si presenta di più facile indagine in questo tipo di approccio è la possibilità di costruire teorie consistenti con un contenuto di spin maggiore di 2. Infine la conoscenza della teoria al 1° ordine può modificare l'approccio alla quantizzazione: un esempio è la teoria a 5 dimensioni sopra accennata di cui esistono due versioni differenti al 1° ordine che risultano identiche al 2° ordine.

Abbiamo appena sfiorato argomenti e problemi sulla situazione attuale della supergravità. Fermi restando gli enormi progressi e contributi fondamentali dati da diversi autori alla formulazione originaria (non geometrica) di queste teorie, pensiamo che l'approccio geometrico qui descritto abbia dato e possa dare un contributo notevole a una loro più profonda comprensione.

BIBLIOGRAFIA

Per una introduzione alla supergravità vedi:
P. Van Nieuwenhuizen: Supergravity Physics Reports, 68, 4 (1981).

(1) Per i problemi connessi alla superunificazione vedi ad es.:
J. Ellis, M. K. Gaillard, L. Maiani e B. Zumino: Attempts at superunification in "Unification of the Fundamental Particle Interactions, Ettore Majorana International Science Series, edited by S. Ferrara e P. Van Nieuwenhuizen. Plenum Press (1980).

(2) Per un'introduzione alla supersimmetria vedi ad es.:
P. Fayer and S. Ferrara, Phys. Reports 21 (1977) 249.

(3) S. Ferrara: Aspects of Supergravity Theories TH 2957-CERN Talk given at the "9th International Conference on General Relativity and Gravitation" Jena, G.D.R., 1980.

(4) J. Wess e B. Zumino - Nucl. Phys. **B70** (1974) 39.

(5) D.Z. Freedman, P. Van Nieuwenhuizen e S. Ferrara, Phys. Rev. **D13**, 3214 (1976).

(6) S. Deser e B. Zumino, Phys. Lett. **B62**, 335 (1976).

(7) T. W. Kibble, J. Math. Phys. **2**, 212 (1960).

(8) H. Flanders: Differential Forms, Academic Press (N.Y.) (1963).

(9) Y. Ne'eman, T. Regge - Rivista del Nuovo Cimento **1**, 5, 1 (1978).

(10) A. D'Adda, R. D'Auria, P. Fré e T. Regge - Rivista Nuovo Cimento 3, 6 (1980).

(11) R. D'Auria, P. Fré, T. Regge - Rivista del Nuovo Cimento 3, 12 (1980).

(12) R. D'Auria, P. Fré, E. Maina e T. Regge - Annals of Physics, 135, (1981), 237.

Considerazioni sulla teoria quantistica della gravità

*Vittorio de Alfaro *, Sergio Fubini * e Giuseppe Furlan ***

Dedichiamo queste brevi note al caro amico Mario Verde ricordando molti anni di lavoro comune, con l'augurio più fervido per il futuro.

1. Gli sviluppi più recenti in Fisica delle Particelle Elementari hanno coinciso con una entusiasmante attività in Teoria dei Campi. Basandosi sull'applicazione di idee come rottura spontanea di una simmetria ed invarianza rispetto trasformazioni locali, ciò ha portato a quella che sembra una precisa identificazione, tramite le cosiddette teorie di gauge, delle teorie lagrangiane rinormalizzabili atte a descrivere le interazioni fondamentali. In questo quadro la teoria della gravitazione di Einstein ha riacquistato una posizione di rinnovato interesse sia attraverso il tentativo di una unificazione definitiva delle interazioni e dei costituenti la materia (supergravità e teorie supergran unificate) sia per il desiderio di pervenire a una formulazione soddisfacente della gravità come teoria dei campi, arricchita da proprietà topologiche e geometriche certamente uniche.

Dal punto di vista del fisico delle Particelle Elementari la teoria quantistica della gravitazione va considerata come la teoria di una particella a spin due, senza massa, il gravitone. Il corrispondente campo è un tensore simmetrico $g_{\mu\nu}(x)$ le cui proprietà sono descritte dalla classica Lagrangiana (o meglio dalla azione) di Einstein. Questa incorpora il principio di equivalenza tra inerzia e gravitazione in un modo straordinariamente profondo e semplice e cioè attraverso il requisito

* CERN - Ginevra, Svizzera
Istituto di Fisica Teorica, Università di Torino
I.N.F.N., sezione di Torino
** Istituto di Fisica Teorica, Università di Trieste
I.N.F.N., sezione di Trieste

dell'invarianza rispetto trasformazioni generali di coordinate $x'^{\mu} = f^{\mu}(x)$. L'ulteriore requisito (di natura dinamica) della presenza soltanto di termini con non più di due derivate porta in modo sostanzialmente unico alla famosa espressione $A \propto \int \sqrt{-\det g_{\mu\nu}}\, R\, d^4x$.

L'aspetto corpuscolare, e cioè la riduzione ai due stati di elicità (± 2) propri della particella fisica, emerge sviluppando $g_{\mu\nu}(x)$ attorno alla configurazione asintoticamente piatta $\eta_{\mu\nu} \equiv (1,-1,-1,-1)$, soluzione delle equazioni di Einstein a grandi distanze da ogni sistema materiale, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, ed usando la libertà di scegliere un particolare sistema di coordinate per imporre delle condizioni supplementari sul campo $h_{\mu\nu}$.

Un tale punto di vista porta inevitabilmente a considerare l'interpretazione geometrica della gravitazione ($g_{\mu\nu}(x)$ quale tensore metrico dello spazio-tempo e così via) come una analogia suggestiva ma non essenziale, anche se nel limite classico la teoria risultante è esattamente quella di Einstein. Il fatto centrale resta l'invarianza della teoria rispetto trasformazioni generali di coordinate; le conseguenti trasformazioni dei campi sono di tipo locale (vedi l'Appendice I per una raccolta di alcune formule utili), molto simili alle trasformazioni di gauge per campi di Yang-Mills. Non a caso questo modo di considerare la gravitazione quale teoria di gauge generale è soprattutto dovuta, tra gli altri, ad autori come Feynman, Salam [(1)], Weinberg [(2)], 't Hooft che tanto hanno contribuito a far progredire la visione di Einstein di una natura unificata dalle varie interazioni.

2. Uno dei motivi di perplessità nei confronti di uno sforzo per includere la gravitazione nel quadro dei fenomeni subnucleari è dovuto all'opinione diffusa che i suoi effetti quantistici comincino ad esser importanti solo ad energie estremamente elevate, dell'ordine della cosiddetta massa di Planck $M_p = \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} \approx 10^{19}$ GeV/c^2 (o corrispondentemente a distanze dell'ordine di $L = \left(\frac{4\pi\hbar G}{c^3}\right)^{1/2} \approx 10^{-33}$ cm.). La grandezza dimensionale che determina quantitativamente questa scala è la costante di Newton G ($G \cong 6.7 \times 10^{-8}$ cm^3 gr^{-1} sec^{-2}) che regola al tempo stesso l'intensità dei fenomeni gravitazionali macroscopici.

La sua introduzione nella formulazione della teoria avviene in un modo, tutto sommato, abbastanza fenomenologico [3] per garantire le corrette proprietà dimensionali della azione A. Si pone cioè

$$A = -\frac{1}{4G}\int \sqrt{-g}\, R\, d^4x. \tag{1}$$

In relatà la presenza nella Lagrangiana di partenza di una costante dimensionale è abbastanza sorprendente. Infatti viste le proprietà generali di simmetria della teoria questa risulta in particolare invariante rispetto a dilatazioni $x'^{\mu} = \rho\, x^{\mu}$ e la nostra esperienza ci ha abituati ad associare a teorie con invarianza di scala quantità senza dimensioni. Si pensi all'elettrodinamica o alle teorie di Yang-Mills che sono invarianti di scala nel limite in cui la massa dei fermioni è nulla.

Formalmente questo piccolo paradosso può venir risolto riassorbendo G attraverso una semplice ridefinizione dei campi e cioè

$$g_{\mu\nu} \to L^2\, g_{\mu\nu} \tag{2}$$

Il nuovo campo $g_{\mu\nu}$ acquista, in modo elementare, dimensionalità -2 (in unità di lunghezza, con $\hbar = c = 1$). E' facile vedere (la discussione è riprodotta in Appendice I) come una tale attribuzione coincida con quella suggerita dalle proprietà generali di trasformazione di $g_{\mu\nu}$.

In tal modo G scompare dall'espressione di A, eq. 1; in generale avremo che, anche in casi più complicati, la teoria contiene solo parametri adimensionali. Così nel caso dell'interazione tra gravitazione e materia

$$A = -\frac{1}{4}\int \sqrt{-g}\, d^4x\, \{R + \lambda + L_{\text{materia}}(\phi_i, \mu_i^2, \ldots)\} \tag{3}$$

ove la costante cosmologica λ è misurata in unità M_P^2 e lo stesso vale per tutte le masse nella parte di materia ossia $\mu_i^2 = m_i^2/M_P^2$.

E' divertente notare come con questa nomenclatura la legge di gravitazione universale di Newton assuma una forma del tutto simile a quella elettrostatica e cioè in termini di "cariche" gravitazionali senza dimensioni $e \to \mu = G^{1/2}\, m$:

$$U(r) = G\,\frac{m_1\, m_2}{r} = \frac{\mu_1\, \mu_2}{r} \quad . \tag{4}$$

Per render più chiara la connessione con la formulazione abituale consideriamo il caso della gravitazione pura ($\lambda = 0$, $L_{\text{materia}} = 0$) per la quale l'azione non conserva più traccia di G. Il modo in cui ora la costante di Newton compare è attraverso la condizione al contorno che a grandi distanze il tensore $g_{\mu\nu}$ si comporti come la soluzione piatta $\eta_{\mu\nu}$: il cambio di dimensionalità fissa ora la forma di $g_{\mu\nu}$ come

$$(g_{\mu\nu})_{\text{piatta}} = \frac{1}{L^2}\,\eta_{\mu\nu}\,, \qquad L^2 = 4\pi G. \tag{5}$$

Ciò significa che, da questo punto di vista, la costante G non corrisponde a una proprietà generale della teoria quale espressa dall'azione A, ma caratterizza una particolare, anche se importantissima, classe di soluzioni da usare nella descrizione dei fenomeni macroscopici che hanno luogo a grandi distanze. E' quindi chiaro come una tale formulazione risulti completamente equivalente a quella convenzionale per quanto riguarda i fenomeni newtoniani "classici" della relatività generale; tuttavia lo schema di partenza è molto più generale e come tale consente la possibilità di discutere fenomeni non Newtoniani, la cui intensità cioè non è pesata dalla costante G.

3. Un primo esempio di questa situazione è fornito dallo studio di soluzioni classiche non Newtoniane. Infatti, come brevemente riassunto in Appendice II, esistono sia nel caso della gravitazione pura (con termine cosmologico in realtà) sia per l'accoppiamento con campi di materia (Yang-Mills con colore, scalari...) soluzioni non banali delle equazioni del moto. Queste sono per lo più del tipo conformemente piatto cioè $g_{\mu\nu}(x) = h^2(x)\,\eta_{\mu\nu}$ e sono ulteriormente classificabili secondo il loro sottogruppo di invarianza; le più comunemente note sono le cosiddette soluzioni istantoniche e meroniche [4]:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &= \frac{3}{\sqrt{2\lambda}}\,\frac{1}{\sqrt{x^2}}\,\eta_{\mu\nu}\,, && \text{(merone)} \\ g_{\mu\nu}(x) &= \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\,\frac{2a}{a^2+x^2}\,\eta_{\mu\nu}, && \text{(istantone)} \end{aligned} \tag{6}$$

(λ è la costante cosmologica).

Il loro interesse è legato a un eventuale ruolo nello studio della struttura adronica. In particolare è stato discusso l'uso di queste soluzioni come background classico, non perturbativo, attorno al quale sviluppare il campo determinando le fluttuazioni quantistiche. Anche se questa possibilità, considerata attraente da molti, richiede ulteriori analisi ed investigazioni, l'esistenza delle suddette soluzioni rimane un fatto matematico esatto ed interessante.

Un modo più significativo e più fecondo di conseguenze si ottiene riformulando le considerazioni precedenti in linguaggio quantistico. L'idea di partenza è che l'azione e le condizioni di quantizzazione dei campi non dipendono dalla costante di Newton. Questa entra nella storia attraverso il valor medio sul vuoto [4,5]

$$\langle 0|g_{\mu\nu}(x)|0\rangle = \frac{1}{L^2}\,\eta_{\mu\nu} \qquad (7)$$

che costituisce la versione quantistica della (5). Una tale situazione ricorda il caso del modello-σ lineare [6] in cui la Lagrangiana è invariante rispetto al gruppo di isospin chirale SU(2) × SU(2) ~ O(4). Tuttavia il vuoto ha un'invarianza più bassa, quella di SU(2) ~ O(3), e una manifestazione di questo fatto è nell'esistenza di un valore di aspettazione non nullo del campo ϕ_α ($\alpha = 1 \dots 4$) cioè

$$\langle 0|\phi_\alpha(x)|0\rangle = \delta_{\alpha 4}\, f_\pi \ . \qquad (8)'$$

La costante dimensionale f_π, che è una misura di questa rottura spontanea della simmetria, determina il comportamento di bassa energia delle ampiezze che coinvolgono pioni.

In modo analogo possiamo dire per la gravitazione che, pur partendo da un'azione invariante generale, il vuoto viola l'invarianza rispetto a dilatazioni (e quindi rispetto a trasformazioni generali di coordinate) mantenendo il gruppo di Poincaré come sottogruppo di simmetria. E' questo fatto a permettere l'introduzione, esternamente alla Lagrangiana, di una costante dimensionale L la quale, come f_π per i fenomeni pionici, determina il comportamento alle basse energie delle ampiezze con emissione e assorbimento di gravitoni e cioè la gravità classica.

L'esistenza di soluzioni classiche non Newtoniane, cui si è accennato prima, offre l'interessante possibilità di una loro interpretazione come valori medi del campo $g_{\mu\nu}(x)$: ciò corrisponderebbe all'esisten-

za di vuoti invarianti rispetto a diversi sottogruppi dell'insieme delle trasformazioni generali di coordinate. In quanto non Newtoniane queste proprietà del vuoto potrebbero intervenire in una descrizione dei fenomeni adronici valida in regioni diverse da quelle dei fenomeni gravitazionali macroscopici.

Resta comunque il fatto importante che tutte le proprietà delle funzioni di Green che derivano da caratteristiche generali della teoria, come ad esempio relazioni di commutazione, saranno indipendenti da G o da altre costanti fondamentali relative alle varie soluzioni classiche. Ciò porta naturalmente alla domanda di quale sia l'importanza relativa degli effetti che derivano dall'uso di un particolare vuoto e dall'invarianza generale dell'azione.

4. E' importante a questo proposito ricordare il ruolo giocato dalla costante di Newton nel provocare, secondo la formulazione abituale, la non rinormalizzabilità della gravitazione. L'applicazione delle tecniche perturbative consuete alla gravitazione incontra le difficoltà ben note che hanno origine nella non polinomialità della Lagrangiana per la presenza di termini come $\sqrt{-\det g_{\mu\nu}}$, come l'operatore inverso $g^{\mu\nu}$ e così via. Il problema viene affrontato usando la seguente separazione tra "background" Newtoniano e parte quantistica di $g_{\mu\nu}(x)$:

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{L^2}\left(\eta_{\mu\nu} + L\,\varphi_{\mu\nu}(x)\right) \tag{9}$$

(ove $\varphi_{\mu\nu}$ è un operatore a dimensione -1) e sviluppando in $L\varphi_{\mu\nu}$. Conseguentemente l'analogo del termine di interazione risulta espresso come una serie di potenze in L che, a causa della dimensionalità del parametro di sviluppo, presenta le difficoltà delle teorie non rinormalizzabili con diagrammi sempre più divergenti con l'ordine in L.

Il nostro punto di vista è che una tale situazione è conseguenza del voler usare a piccole distanze lo sviluppo in L che è, in realtà, solo adatto a descrivere fenomeni di bassa energia. Invece, per quel che riguarda l'altro limite asintotico il limitarsi a un numero finito di termini in L fa sì che non vengano rispettate le proprietà di invarianza generale della teoria, basate appunto sulla non polinomialità e cioè sull'intera serie, ma solo quelle rispetto al gruppo di Poincaré. Non è così troppo sorprendente che questa procedura non riproduca necessariamente il corretto andamento a piccole distanze. (Nell'Appendice

III vengono presentati alcuni risultati ad illustrazione di questi punti).

In altri termini tornando alla domanda di partenza l'effetto del vuoto, legato a L, è di natura essenzialmente infrarossa mentre l'invarianza generale, in particolare l'invarianza di scala e conforme, controlla il comportamento nell'ultravioletto che dovrebbe pertanto esser indipendente da L (o con, al più, una dipendenza di tipo logaritmico). Ciò significa che a piccole distanze il comportamento delle funzioni di Green dovrebbe avere una forma di potenza, con esponente fissato da considerazioni dimensionali, e la gravitazione non risulterebbe quindi sostanzialmente differente da una teoria rinormalizzabile(7). Parafrasando Coleman(8) dovremmo poter dire: "Le divergenze ultraviolette di una teoria rispettano la simmetria della Lagrangiana anche se il vuoto non lo fa!"

In realtà l'affermazione di Coleman si riferisce alle proprietà di simmetria interna ma è un problema di estremo interesse il vedere se considerazioni analoghe si applicano a teorie non polinomiali con simmetrie spazio-temporali. (Ovviamente si tratterà di risultati validi a meno di fattori logaritmici, come insegna il caso della Cromodinamica Quantistica).

Pertanto la rinormalizzabilità della gravitazione può, a nostro avviso, venir considerato un problema ancora aperto e lo stesso vale per quanto riguarda l'importanza degli effetti quantistici gravitazionali alle altissime energie.

Le difficoltà nell'attuazione di un tale programma sono formidabili, come ben noto. La natura non polinomiale della Lagrangiana gravitazionale, la necessità di lavorare con operatori inversi pongono tutta una serie di problemi nuovi, rispetto a quelli già presentatisi nelle teorie di gauge, problemi ancora da affrontare e capire. Ci sono molte idee che potranno combinarsi in questo sforzo, dalla supergravità a formulazioni nuove della teoria dei campi: se sapremo lavorare con umiltà e pazienza per la teoria questa ci compenserà con la profonda verità e semplicità dei risultati.

Appendice I

Data una riparametrizzazione delle coordinate

$$x^\mu \to x'^\mu = f^\mu(x) \cong x^\mu + \epsilon^\mu(x), \tag{A.1}$$

ricordiamo la corrispondente legge di trasformazione di un tensore generale $t^{\mu_1 \dots \mu_M}_{\nu_1 \dots \nu_N}$, per semplicità nel caso di una variazione infinitesima:

$$\delta t^{\mu_1 \dots \mu_M}_{\nu_1 \dots \nu_N}(x) \equiv (t'(x) - t(x))^{\mu_1 \dots \mu_M}_{\nu_1 \dots \nu_N} =$$

$$= - \epsilon^\lambda \partial_\lambda t^{\mu_1 \dots \mu_M}_{\nu_1 \dots \nu_N} - t^{\mu_1 \dots \mu_M}_{\lambda \dots \nu_N} \partial_{\nu_1} \epsilon^\lambda - \dots \tag{A.2}$$

$$\dots t^{\mu_1 \dots \mu_M}_{\nu_1 \dots \lambda} \partial_{\nu_N} \epsilon^\lambda + t^{\lambda \dots \mu_M}_{\nu_1 \dots \nu_N} \partial_\lambda \epsilon^{\mu_1} + \dots t^{\mu_1 \dots \lambda}_{\nu_1 \dots \nu_N} \partial_\lambda \epsilon^{\mu_M}$$

In particolare per le quantità famigliari a tensorialità più bassa otteniamo

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} &= - \epsilon^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} - g_{\mu\lambda} \partial_\nu \epsilon^\lambda - g_{\lambda\nu} \partial_\mu \epsilon^\lambda, \\ \delta g^{\mu\nu} &= - \epsilon^\lambda \partial_\lambda g^{\mu\nu} + g^{\mu\lambda} \partial_\lambda \epsilon^\nu + g^{\lambda\nu} \partial_\lambda \epsilon^\mu, \\ \delta A_\mu &= - \epsilon^\lambda \partial_\lambda A_\mu - A_\lambda \partial_\mu \epsilon^\lambda, \\ \delta \phi &= - \epsilon \cdot \partial \phi . \end{aligned} \tag{A.3}$$

($\phi(x)$ può essere un campo scalare o spinoriale).

Consideriamo ora il caso particolare di una trasformazione di scala

$$\epsilon^\mu(x) = - \epsilon \, x^\mu . \tag{A.4}$$

Dalla (A.2) segue immediatamente che

$$\delta t^{\mu_1 \dots \mu_M}_{\nu_1 \dots \nu_N}(x) = \epsilon (x \cdot \partial - \Delta) t^{\mu_1 \dots \mu_M}_{\nu_1 \dots \nu_N} \tag{A.5}$$

ove $\Delta = M - N$ è la differenza tra il numero di componenti controvarianti e covarianti. Vista l'eq. A.5 è naturale l'affermazione che il

tensore $t^{\mu_1 \dots}_{\nu_1 \dots}$ è di dimensionalità Δ. Conseguentemente avremo nei casi più elementari le seguenti attribuzioni:

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu} &: \Delta = -2, +2 \ , \\
\sqrt{-g} &: \Delta = -4, \\
R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} &: \Delta = 0 \,, \\
A_\mu, A^\mu &: \Delta = -1, +1 \,, \\
\phi(x) &: \Delta = 0.
\end{aligned}
\tag{A.6}
$$

E' immediato verificare che con questi valori di Δ l'azione di Einstein risulta invariante di scala senza alcuna necessità di introdurre costanti dimensionali. Inoltre la dimensionalità -2 di $g_{\mu\nu}$ derivante dalle proprietà di trasformazioni A.3 è in accordo con l'attribuzione intuitiva che segue dall'incorporare G, secondo l'equazione (2) del testo.

Può risultare a prima vista sorprendente il fatto che i campi scalare e spinoriale abbiano dimensionalità nulla, in contrasto con i valori abituali -1, $-3/2$ delle teorie di campo canoniche. Questo punto può venir chiarito senza venir chiarito senza difficoltà: consideriamo come esempio la parte "cinetica" dell'azione per un campo scalare (che in realtà è una forma di accoppiamento alla gravitazione)

$$A = \int \sqrt{-g}\, d^4x\, g^{\mu\nu}\, \partial_\mu \phi\, \partial_\nu \phi \,. \tag{A.7}$$

Quello che chiameremmo il caso libero vero e proprio coincide con il limite piatto, per noi della forma $g_{\mu\nu} \to \frac{1}{L^2} \eta_{\mu\nu}$, e cioè

$$A \to \frac{1}{L^2} \int d^4x\, \eta_{\mu\nu}\, \partial_\mu \phi\, \partial_\nu \phi \,. \tag{A.8}$$

Ciò fa vedere come il riottenere la versione abituale della teoria piatta richieda l'introduzione di un nuovo campo $\varphi(x)$ a dimensione -1:

$$\varphi(x) = \frac{1}{L} \phi(x) \tag{A.9}$$

Una discussione più approfondita del problema[8] permette di

dedurre che la generalizzazione corretta della (A.9) è in realtà

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (-g)^{1/8}\ \phi(x) \\ \delta\varphi &= \epsilon(x \cdot \partial + 1)\,\varphi(x) \end{aligned} \tag{A.10}$$

Questa definizione, ed una analoga per il campo spinoriale $\psi(x) = (-g)^{3/16}\ \Psi(x)$, garantiscono la dimensionalità canonica e l'invarianza conforme della teoria nel limite piatto.

Appendice II

I recenti successi delle teorie di gauge, con le loro peculiari proprietà di invarianza e meccanismi di rottura, confermano l'interesse di considerare modelli di teoria dei campi privi di costanti dimensionali che possono eventualmente venir introdotte dall'esterno attraverso il "vuoto" cioè attraverso particolari soluzioni classiche. Ciò ha condotto naturalmente allo studio di teorie con invarianza conforme (cioè rispetto al gruppo conforme a 15 parametri isomorfo, nella regione euclidea, a SO(5, 1)) e successivamente con invarianza rispetto a trasformazioni generali di coordinate [9].

Consideriamo come esempio di questa situazione il caso della gravitazione, con termine cosmologico, in interazione con un campo di Yang e Mills di colore (SU(2) per semplicità):

$$A = -\frac{1}{4}\int \sqrt{g}\, d^4x \left\{ R + \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{1}{e^2}\Sigma_\alpha F^\alpha_{\mu\nu} F^\alpha_{\lambda\rho}\, g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} \right\} \quad \text{(B.1)}$$

L'invarianza conforme suggerisce lo studio di soluzioni del tipo "conformemente piatto" (con una metrica euclidea)

$$g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu}\, b^2(x) \quad \text{(B.2)}$$

che, come noto, hanno la proprietà di mantenere la loro forma per trasformazioni conformi. Inoltre se $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ si vede facilmente che in corrispondenza a B.2 e con ϵ_μ conforme si ha

$$\delta b(x) = -\left(\frac{1}{4}\partial_\lambda \epsilon_\lambda + \epsilon_\lambda \partial_\lambda \right) b(x) \quad \text{(B.3)}$$

La derivazione di particolari soluzioni classiche può ora venir basata sulla loro invarianza rispetto a sottogruppi diversi del gruppo conforme. Ciò dà luogo ad equazioni del primo ordine ovviamente di più facile soluzione e permette di ridurre le equazioni del moto vere e proprie ad equazioni algebriche.

Il caso più semplice è naturalmente quello con invarianza rispetto al gruppo di Poincaré che porta a

$$b(x) = \frac{1}{L} \quad \text{(B.4)}$$

ove L è una costante con dimensioni di una lunghezza (da identificare con la costante di Newton).

Se ci interessiamo a soluzioni invarianti rispetto al sottogruppo SO(4) × SO(1,1) (rotazioni e dilatazioni quadridimensionali) la condizione B.3 diventa

$$(x \cdot \partial + 1)\, h(x^2) = 0 \tag{B.5}$$

ossia il "merone"

$$h(x^2) = \text{cost.}\, (x^2)^{-1/2} \tag{B.6}$$

In modo analogo la soluzione invariante rispetto al massimo sottogruppo compatto SO(5) è "l'istantone"

$$h(x^2) = \text{cost.}\ \frac{a}{a^2 + x^2} \tag{B.7}$$

("a" è una lunghezza).

L'aspetto interessante delle soluzioni B.6 e B.7 sta nel loro carattere non Newtoniano: la dipendenza dallo spazio-tempo consente le giuste dimensioni del campo $g_{\mu\nu}(x)$ senza ricorrere alla costante di Newton. Pertanto i loro effetti, pur sempre gravitazionali, in Fisica delle Particelle Elementari non sono necessariamente trascurabili.

Naturalmente mentre la forma delle soluzioni segue da considerazioni generali, la determinazione delle varie costanti dipende dal modello studiato. Nel caso che stiamo considerando si ottiene che le soluzioni per il campo di gauge corrispondenti a B.2 sono

$$\frac{\sigma^\alpha}{2i} A^\alpha = i\, \sigma_{\mu\nu}\, \partial_\nu \log h(x) \tag{B.8}$$

purché $h(x)$ sia soluzione dell'equazione scalare

$$\Box\, h(x) + \frac{\lambda^2}{2} h^3(x) = 0 \tag{B.9}$$

e purché tra costante cosmologica λ^2 e carica di gauge "e" esista la relazione

$$\lambda^2 = e^2 \tag{B.10}$$

Dall'equazione B.9 abbiamo che

$$h_M(x) = \frac{1}{|\lambda|} \sqrt{\frac{2}{x^2}}, \quad h_I(x) = \frac{1}{|\lambda|}\ \frac{4\,a}{a^2 + x^2}, \tag{B.11}$$

mentre la soluzione piatta $b(x) = \text{cost.}$ esiste solo in assenza di costante cosmologica e disaccoppiamento del campo vettoriale.

Lo scopo di questa discussione era di mettere in luce l'esistenza di soluzioni non Newtoniane per gravità accoppiata alla materia: il loro uso, il valore effettivo di relazioni come B.10, il tipo di modello (nella cui scelta la supersimmetria può avere un aspetto importante) costituiscono questioni tuttora aperte.

Appendice III

Come già ricordato nel testo la non polinomialità della Lagrangiana gravitazionale viene solitamente trattata mediante uno sviluppo in L che non riproduce l'andamento a piccole distanze suggerito da considerazioni dimensionali. Questo problema si manifesta per esempio attraverso la presenza di operatori inversi e la discussione di un caso semplice può esser utile per illustrare la situazione. Consideriamo un campo scalare a dimensione -1 da sviluppare intorno a un background classico (costante per semplicità)

$$h(x) = \mu + h'(x), \quad \langle h(x) \rangle_0 = \mu \tag{C.1}$$

la cui funzione di Green risulta

$$\langle h(x)\, h(y) \rangle_0 = \mu^2 + G(x-y) = \mu^2 + \frac{c}{(x-y)^2} \tag{C.2}$$

Notiamo intanto come già questo risultato banale illustri il fatto che a grandi distanze la funzione di Green sia data dalla parte costante (l'effetto del vuoto) mentre a piccole distanze il termine $[(x-y)^2]^{-1}$ è dominante, in accordo con quanto suggerito da argomenti dimensionali.

Il problema interessante sorge se è richiesta la funzione di Green dell'operatore inverso $h^{-1}(x)$, che può venir facilmente ottenuta attraverso uno sviluppo in $h'(x)/\mu$:

$$\begin{aligned} I(x-y) \equiv \langle h^{-1}(x)\, h^{-1}(y) \rangle_0 &= < \frac{1}{\mu + h'(x)} \; \frac{1}{\mu + h'(y)} >_0 = \\ &= \frac{1}{\mu^2} < \Sigma_n \left(- \frac{h'(x)}{\mu} \right)^M \Sigma_m \left(- \frac{h'(y)}{\mu} \right)^m >_0 = \\ &= \frac{1}{\mu^2} \left\{ 1 + \frac{G(x-y)}{\mu^2} + \frac{2}{\mu^4} G^2(x-y) \ldots \right\} = \\ &= \frac{1}{\mu^2} \Sigma_n \; n! \left(\frac{G(x-y)}{\mu^2} \right)^n \end{aligned} \tag{C.3}$$

Usando la rappresentazione integrale

$$n! = \int_0^\infty \alpha^n e^{-\alpha} d\alpha \tag{C.4}$$

si arriva al risultato già noto [10]

$$I(x-y) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha} d\alpha}{\mu^2 - \alpha G(x-y)} \tag{C.5}$$

In particolare a piccole distanze $(x-y)^2 \to 0$ l'equazione C.5 fornisce

$$I(x-y) \sim (x-y)^2 \log[\mu^2 (x-y)^2] \tag{C.6}$$

Pertanto a meno del termine logaritmico, che contiene ancora una residua, ma debole, dipendenza dal background, il comportamento ultravioletto è quello che uno si aspetta sulla base dell'invarianza per dilatazioni. Tuttavia un tale risultato ha richiesto la somma della intera serie in $1/\mu^2$, mentre il considerare un numero finito di termini avrebbe portato ad un'indicazione completamente sbagliata, con divergenze sempre più drammatiche. E' facile vedere che per operatori più complicati il risultato è sostanzialmente analogo, in particolare

$$\langle b^{-n}(x)\, b^{-n}(y)\rangle_0 \sim [(x-y)^2]^n \log[\mu^2 (x-y)^2] \tag{C.7}$$

(Nota che la potenza del logaritmo non cresce con n).

Nel caso della Lagrangiana gravitazionale il problema è naturalmente ben più complicato, tuttavia l'analisi di alcuni esempi conferma che gli argomenti dimensionali continuano a mantenere la loro validità. Così si ottengono risultati del tipo

$$\langle (-\det g_{\mu\nu}(x))^{-1/2} (-\det g_{\mu\nu}(y))^{-1/2} \rangle_0 \sim$$
$$\sim [(x-y)^2]^4 \log[\mu^2 (x-y)^2]$$

Inoltre allo scopo di saggiare la consistenza del ragionamento per l'intera Lagrangiana abbiamo studiato un modello euristico per la gravitazione pura, basato sulla formulazione mediante "tetradi". L'idea è stata di considerare una separazione [7]

$$V^a_\mu(x) = b(x)\, \delta_{\mu a} + \bar{V}^a_\mu(x), \quad b(x) = \mu + b'(x), \tag{C.8}$$

e di sviluppare in $\bar{V}^a_\mu/h$, che si comporta come un operatore di dimensione zero. Pertanto

$$< \frac{\bar{V}^a_\mu(x)}{h(x)} \quad \frac{\bar{V}^a_\nu(y)}{h(y)} >_0 \underset{(x-y)^2 \to 0}{\sim} \text{const.} \log [\mu^2 (x-y)^2] \tag{C.9}$$

e non influisce in modo essenziale sul comportamento a piccole distanze.

Il vantaggio rispetto alla separazione consueta

$$V^a_\mu(x) = \mu\, \delta_{\mu a} + V'^a_\mu(x) \tag{C.10}$$

è che C.8 (e così lo sviluppo in $\bar{V}^a_\mu/h$) mantiene l'invarianza conforme e di scala anche se non quella generale. Inoltre la Lagrangiana di "interazione" che ne risulta, e che è una serie in $\bar{V}^a_\mu/h$, ha dimensione -4 ad ogni ordine per cui il comportamento a piccole distanze dovrebbe essere del tutto simile a quello di un modello rinormalizzabile, a parte termini logaritmici del tipo $\log [\mu^2 (x-y)^2]$.

Il modello soffre di un certo numero di inconsistenze (il campo $h(x)$ è in realtà un "ghost"), tuttavia, per quanto ingenuo, ha il pregio di visualizzare in modo concreto la possibilità di soluzioni alternative all'asserita non rinormalizzabilità della gravitazione.

BIBLIOGRAFIA

(1) A. Salam: "Impact of Quantum Gravity in Particle Physics" in Quantum Gravity, an Oxford Symposium" editori C. Isham, R. Penrose. D. Sciama, Oxford University Press (1975).

(2) S. Weinberg: "Gravitation and Cosmology" J. Wiley, New York (1972).

(3) Si veda per esempio L. Landau e E. Lifshitz: "The Classical Theory of Fields", Pergamon Press (Oxford).

(4) V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan: Il Nuovo Cimento **A50**, 523 (1979).

(5) V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan: Il Nuovo Cimento **B57**, 227 (1980).

(6) Si veda per esempio V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan. C. Rossetti: "Currents in Hadron Physics" North Holland Publ. Amsterdam (1973).

(7) V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan: Physics Letters **B97**, 67 (1980).

(8) S. Coleman in "Laws of Hadronic Matter" A. Zichichi ed., Academic Press (1975).
(9) Si veda per una presentazione completa: V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan, Acta Physica Austriaca, Supp. XXII 51, (1980).
(10) Si veda per esempio "Non Polynomial Lagrangians, Renormalization, Gravity", Tracts in Mathematies and Natural Sciences Vol. 1 (1971) A. Salam ed.

Conclusioni

*Vittorio de Alfaro * e Sergio Fubini **

Nel riassumere questo convegno, dedicato alla figura di Mario Verde e quindi alla fisica teorica torinese degli ultimi 30 anni, desideriamo vedere da un punto di vista più vasto il progresso della nostra attività scientifica in questo periodo, svolgendo le nostre impressioni sull'evoluzione dei concetti della fisica teorica delle particelle nel trentennio passato, a cui Torino ha contribuito in modo essenziale.

Cercheremo quindi di delineare lo sviluppo delle idee teoriche a partire da quell'inizio degli anni '50 in cui uno di noi si laureava mentre l'altro terminava il liceo, lungo questo periodo che abbiamo vissuto lavorando in fisica teorica avendo Torino come sistema di riferimento; non intendiamo naturalmente fare storia della fisica, ma soltanto portare una testimonianza in cui saranno messi in rilievo — non sempre forse in ordine di importanza — quegli sviluppi che ci sono più familiari perché vissuti più direttamente. Questo spiega l'enfasi (ingiustificata da un punto di vista generale) da noi data alle interazioni forti la cui evoluzione è la sola che ci sia veramente familiare.

Un confronto con il precedente trentennio ci dà un'idea della lunghezza del periodo e della quantità di progresso scientifico che può essere realizzato.

All'inizio degli anni '20 la relatività generale era stata appena verificata in una delle sue previsioni più importanti attraverso le famose osservazioni durante l'eclisse del 1919. La figura di Einstein

* CERN-Ginevra, Svizzera.
Istituto di Fisica Teorica dell'Università di Torino
I.N.F.N. - Sezione di Torino
Scuola di Specializzazione in Fisica Nucleare dell'Università di Torino

passava a diventare una personalità di notorietà mondiale destinata a raggiungere il mito.

La conoscenza del mondo delle particelle, limitata ancora alla prima meccanica dei quanti, precedente all'onda di De Broglie e all'equazione di Schroedinger o agli sviluppi fondamentali di Heisenberg, era costituita da un insieme di ricette non completamente digerite, da cui la maggioranza dei fisici, ancora sotto il trauma provocato dalla relatività, tendeva a rifuggire. La nostra conoscenza dell'atomo riguardava (solo parzialmente) la corteccia esterna, mentre fenomeni come la valenza erano ancora un mistero. Il neutrone, essenziale per la fisica nucleare, doveva aspettare altri 12 anni prima di venire scoperto.

Nel 1950 il quadro era totalmente diverso. La fisica quantistica era ormai accettata dalla comunità scientifica internazionale e il libro del Dirac costituiva la base fondamentale che garantiva la rispettabilità della teoria; inoltre la quantizzazione dei campi (seminata negli anni '30) cominciava a dare i suoi frutti con la spiegazione teorica di alcuni effetti (Lamb shift, momento magnetico anomale dell'elettrone) ottenuta con metodi che a noi sembravano esoterici, i diagrammi di Feynman, la teoria della rinormalizzazione, che ci venivano da oltre oceano in un periodo di spettacolare influenza rinnovatrice della cultura USA in Europa e in Italia in particolare.

Lo scopo di noi giovani (di allora, si intende!) era di metterci al corrente al più presto del nuovo verbo. Questo molto spesso avveniva con la tolleranza o con un po' di compatimento da parte della generazione più anziana che deteneva le posizioni di prestigio. Una delle caratteristiche dell'Istituto di Fisica di Torino fu che noi giovani avevamo appoggio completo e spesso entusiastico delle persone che ci precedevano, sia nella fisica teorica che in quella sperimentale: i professori Gleb Wataghin e Romolo Deaglio, che erano stati i fondatori della nuova ricerca torinese, avevano creato un ambiente di entusiasmo e collaborazione unico in Italia e forse in Europa. L'arrivo di Mario Verde alla cattedra di Fisica Teorica ha potenziato questa atmosfera di umanesimo illuminato contribuendo a rendere facili e piacevoli i rapporti tra le generazioni. Questa caratteristica è stata — con le dovute fluttuazioni — una costante della vita dell'Istituto negli ultimi 30 anni.

Ritornando all'atmosfera degli anni '50 ricordiamo che gli idoli di

questa generazione di giovani erano naturalmente (in ordine alfabetico) Dyson, Feynman e Schwinger. Si diceva in quel periodo che la trattazione di Feynman era di una bellezza fuori del comune mentre non era sempre comprensibile come le formule venissero fuori (nessuno di noi era in grado di apprezzare il metodo funzionale); Schwinger veniva ritenuto eccezionalmente profondo ma accessibile solo a pochi eletti, e la comprensione dei suoi lavori era considerata un titolo di nobiltà scientifica (di cui purtroppo nessuno dei due autori di queste note poteva fregiarsi). Il lavoro di Dyson gli ha valso la gratitudine della maggioranza dei giovani che volevano capire il nuovo nel modo più rapido basandosi su quello che c'era nei libri di testo allora a disposizione, per esempio il Dirac. In fondo per molti di noi è stata una delusione il vedere negli anni seguenti che gli alti meriti di Dyson non hanno forse avuto il riconoscimento dovuto.

L'importanza della fisica nucleare era già universalmente evidente anche al di fuori della ristretta cerchia degli specialisti. Il neutrone era riconosciuto come componente essenziale della struttura del nucleo e la "frontiera" era costituita dallo studio delle fasi di urto nucleone-nucleone vicino alla soglia; nelle speranze dell'epoca questo studio avrebbe dovuto finalmente fornire la formula fondamentale (analoga alla legge di Coulomb dell'elettrostatica) per la forza, e ogni autore verificava i dati sperimentati con potenziali di sua scelta e con eguale successo. La trattazione dell'effective range ha poi mostrato con chiarezza a partire da ragionamenti generali che i dati determinano solo due numeri (lunghezza di urto e distanza efficace) i quali in sostanza determinano solo la profondità e la larghezza della buca di potenziale.

Naturalmente i giovani avevano nel cassetto una spiegazione di queste forze nella teoria di Yukawa. Un candidato ragionevole per il mesone di Yukawa era stato identificato (anche se con parità opposta) nel mesone π. Di nuovo un conflitto di generazione tra i saggi che volevano bandire i mesoni dai nuclei e i giovani entusiasti che sulla scia del successo della elettrodinamica quantistica avevano pronta una teoria di campo a spiegare il mondo; per i "nostalgici" odierni (ahimé non più così giovani) ricordiamo la forma della Lagrangiana di interazione:

$$L' = i\,\bar{\psi}\,\gamma_5\,\tau_\alpha\,\phi_\alpha\,\psi\ .$$

Sembrava quindi che il compito principale della fisica consistesse nell'usare le nuove tecniche su questa Lagrangiana per estendere il successo dell'elettrodinamica alla mesodinamica che naturalmente comprendeva la fisica nucleare.

La difficoltà si motrò quasi subito, quando fu chiaro il fallimento dei metodi perturbativi: si trattava di una interazione forte e i metodi dell'elettrodinamica non erano applicabili.

Seguì una affannosa ricerca di metodi non perturbativi che dimostrò la fantasia di molti teorici. Ne risultò una ragionevole comprensione di alcuni fenomeni, per esempio la risonanza 33, con un potere di previsione non enorme ma neppure trascurabile. Alla fine ci si rese conto che in realtà molte previsioni non dipendevano dalla forma specifica della Lagrangiana ma da caratteristiche generali che potevano venir riprodotte da un semplice modello statico o da formule tipo effective range. Così la teoria fece una brusca sterzata e si passò a teorizzare la fenomenologia: in altre parole si lavorava direttamente su quantità osservabili (o quasi) utilizzando le proprietà generali che una teoria deve possedere, come analiticità ed unitarietà.

Siamo arrivati quindi all'epoca del programma della matrice *S*, in cui le equazioni fondamentali erano date da condizioni di analiticità che portavano a relazioni di dispersione. Era però poco chiaro stabilire quali proprietà di analiticità fossero da considerare ragionevoli e quali no (la guida consisteva in un principio di corrispondenza con la teoria perturbativa). In realtà l'enfasi posta sulle quantità fisiche non ci impediva di usare come cose fondamentali le ampiezze nel campo complesso. La difficoltà stava nella inesistenza di un ente autorizzato a rilasciare le patenti di guida nel campo complesso.

Il clima di quel momento e i rapporti tra giovani e anziani possono essere rivissuti in una storiella che girava allora per i laboratori. Un giovane teorico europeo interessato all'ultimo grido (le proprietà di analiticità della matrice *S* di cui l'espressione più diretta era una rappresentazione dovuta al fisico inglese S. Mandelstam) approdato negli Stati Uniti, corre da Victor Weisskopf e gli rivolge la seguente domanda: "Can you prove the Mandelstam Representation from causality?" Weisskopf risponde "What is the Mandelstam Representation?". Il giovane allora si dirige a Princeton dove pone la stessa domanda a Eugene Wigner che risponde "What is causality?".[1]

---

[1] Con questo si intendeva che Wigner aveva così profondamente riflettuto sul problema della causalità da avere molti più dubbi sulla sua formulazione che non la maggioranza dei teorici che la utilizzavano piuttosto sportivamente.

L'europeo deluso attraversa il continente e giunto sulla costa Ovest interroga Geoffrey Chew, il profeta della dottrina, che piuttosto sorpreso esclama "What is prove?".

Scherzi a parte, e a parte l'esagerazione di certe posizioni, c'era del buono anche in quel periodo. E' di prammatica oggi, che siamo ritornati all'uso di Lagrangiane fondamentali (assai diverse in forma e in spirito da quelle degli anni '50) di guardare con una certa sufficienza a quel periodo di sviluppo così diverso dall'attuale. Questo (e non soltanto per difendere i nostri anni giovanili) non ci sembra completamente giustificato.

Negli anni '60 ci si era resi conto che le assai numerose particelle scoperte in quel periodo non potevano essere adeguatamente comprese sulla base di modelli in cui alcune di esse erano considerate elementari. Non si vedeva alcuna ragione perché per esempio la ρ fosse meno fondamentale del pione o la Δ (ex risonanza 33) lo fosse meno del nucleone. Pertanto era perfettamente accettabile fisicamente (ed è corretto ancora oggi) mettere tutte queste particelle allo stesso livello e studiarle usando condizioni generali per stabilire relazioni fenomenologiche tra le loro proprietà. Questi procedimenti erano ritenuti qualcosa di più di una semplice fenomenologia perché si era convinti che requisiti di carattere generale (invarianze, analiticità, unitarietà) determinassero i risultati un modo praticamente unico. Questo era anche suggerito dal fatto che gli stessi requisiti limitavano in modo estremamente severo la scelta delle possibili Lagrangiane.

Il punto di vista di quell'epoca diventò sempre meno accettabile quando si trasformò in dogma, quando cioè negò a priori che esistessero componenti più fondamentali di cui π, ρ, N, Δ etc. (cioè gli adroni) fossero composti.

La seconda parte degli anni '60 ha testimoniato l'ingresso nella fisica di un concetto che l'avrebbe dominata fino ai tempi attuali. Nel 1963 è stata per la prima volta espressa l'ipotesi audace che le complicazioni e le complessità degli adroni allora conosciuti fossero dovute al fatto di essere composti da oggetti più elementari (i quark) e che pertanto tutti gli adroni fossero sullo stesso piano essendo costruiti combinando in modo diverso gli stessi enti fondamentali.

In attesa di una Lagrangiana fondamentale in termini di quark, l'introduzione delle nuove entità nella teoria è stata lenta ed è avvenuta attraverso diverse strade.

Anzitutto si sono utilizzate le proprietà più generali del modello, come le proprietà gruppali o l'algebra dei commutatori, in uno spirito ancora assai simile a quello della teoria dispersiva. Alcuni dei risultati fondamentali di tali studi sono i teoremi di bassa energia che finalmente hanno spiegato per esempio il problema delle onde S pione-nucleone alla soglia, che erano fino allora un mistero per tutti. D'altra parte, modelli di potenziale di prima quantizzazione rendevano conto piuttosto bene della struttura statica delle particelle in termini di quark. Infine lo studio teorico e sperimentale dei fenomeni di diffusione a piccole distanze ha tolto ogni dubbio residuo sull'esistenza di componenti puntiformi all'interno degli adroni. Resta tuttora aperto il problema dell'esistenza di quark liberi, se sia possibile cioè estrarre un quark dalla materia adronica. Il confinamento dei quark è un problema aperto anche teoricamente, benché la teoria delle forze tra quark fornisca più di un indizio in questa direzione.

Siamo ormai all'ultimo decennio, un periodo estremamente eccitante, che ha visto notevoli cambiamenti e lo sviluppo di nuove idee. Poiché manca forse ancora la giusta prospettiva storica, cercheremo di dire poche cose su quanto ci appare oggi più significativo.

Il tema fondamentale degli ultimi sviluppi è un ritorno alle idee fondamentali di teorie Lagrangiane, con due caratteristiche che le rendono essenzialmente diverse da quelle degli anni '50.

Anzitutto il trionfo delle teorie di gauge di cui la più famosa, dovuta a Yang e Mills, estende le idee dell'elettrodinamica a teorie non abeliane. D'altra parte si è capita l'importanza fondamentale delle proprietà del vuoto che portano all'importante proprietà di rottura spontanea di simmetria. Pertanto un fisico degli anni '50 che ritornasse alla ricerca attiva nel tempo presente riconoscerebbe con difficoltà il campo che gli era familiare.

Ritornando a cose più fenomenologiche, l'idea di quark ha portato un elemento nuovo e inaspettato. Non esiste alcuna analogia evidente tra leptoni (e, ν, μ etc) e gli adroni visti in natura (ad esempio protone, neutrone etc). Esiste invece una analogia impressionante fra quark e leptoni, tanto che essi possono essere catalogati in diverse famiglie di cui le più alte sembrano repliche di Mendelejev di quella fondamentale

$$\begin{matrix} e & u \\ \nu_e & d \end{matrix}$$

che contiene i componenti fondamentali della materia abituale.

Questo tipo di processo di unificazione dei vari tipi di particelle ha preluso all'unificazione dei vari tipi di interazione. Il primo passo è quello che ha portato alla famosa teoria elettrodebole, troppo nota per richiedere una descrizione particolareggiata. Il secondo stadio ha condotto ad una Lagrangiana fondamentale per le interazioni forti; quella della Cromodinamica Quantistica, in cui le forze tra quark sono mediate da gluoni vettori. La teoria, costruita come teoria di gauge non abeliana, dà risultati in buon accordo con i dati sperimentali nella regione di validità dello sviluppo perturbativo.

D'altra parte la stessa teoria ci offre grandi speranze di spiegare l'effetto di confinamento dei quark nella materia adronica.

Infine le teorie di grande unificazione (delle interazioni elettromagnetiche, deboli e forti) richiedono lo studio teorico e sperimentale di distanze piccolissime, ovvero di energie enormi (10^{14} GeV). Esse offrono alcune possibilità di controllo sperimentale non lontano poiché una delle conseguenze principali è l'instabilità del protone. Per osservare questo effetto è necessario attrezzare laboratori in caverne profonde o in gallerie con chilometri di roccia di schermatura. Profonda differenza della fisica sperimentale di 30 anni fa, che per rivelare i raggi cosmici richiedeva laboratori sui picchi più elevati onde evitare la schermatura dell'atmosfera).

La gravità non è più molto lontana dalle energie richieste per le grandi unificazioni. La supergravità è un importante tentativo di unificazione complessiva, e vi sono suggerimenti che i gravitoni siano parenti degli altri componenti fondamentali della materia.

A questo punto dobbiamo fermarci, benché sia difficile farlo nel momento in cui sembrano esistere nuove prospettive. Vi è una profonda comunanza di problemi tra fisica e astrofisica (a livello divulgativo il libro di S. Weinberg "I Primi Tre Minuti" testimonia questa unità); d'altra parte esiste un'analogia sempre più spiccata tra la teoria dei campi e la meccanica statistica che conduce ad un continuo travaso di idee tra un campo e l'altro.

Ci sembra che questi nuovi concetti e punti di vista possano essere i protagonisti della fisica dei prossimi anni.

Atti del

CONVEGNO SU PROBLEMI ATTUALI DI FISICA TEORICA

Torino, 12-13 dicembre 1980

TORINO
ACCADEMIA DELLE SCIENZE
1981

dedicato a Mario Verde per i suoi 60 anni e i 30 di cattedra di Fisica Teorica a Torino.

Atti del
CONVEGNO SU PROBLEMI ATTUALI DI FISICA TEORICA

Torino, 12-13 dicembre 1980

Supplemento n° 2 agli

Atti della Accademia delle Scienze di Torino

I. CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI, VOLUME 115 (1981)

TORINO

1981

INDICE

Ho il piacere di presentare in questo volume i contributi al convegno "Problemi attuali di Fisica Teorica" tenuto nei giorni 12 e 13 dicembre 1980 in onore di Mario Verde per i trenta anni alla nostra cattedra di Fisica Teorica.

Trenta anni fa la fisica teorica torinese era agli inizi, ed in questo periodo ha accumulato una notorietà internazionale ed una posizione di grande prestigio. Il presente volume, dedicato a Mario Verde dai suoi amici, raccoglie contributi di interesse generale sui problemi più importanti della fisica delle particelle, dei nuclei, degli stati condensati, e ci assicura che, con un tale capitale di esperienze ed una attività così qualificata, la nostra scuola di fisica dopo trenta anni è ben degna del suo iniziatore.

A Mario Verde esprimo la gratitudine e l'affetto a nome di tutti i colleghi torinesi che ne hanno conosciuto la figura schiva di scienziato ed apprezzato l'esempio di serietà e rigore morale, insieme agli auguri per il suo sessantesimo compleanno, quasi coincidente con l'anniversario dei trenta anni di cattedra.

Siamo grati al professor Cataldo Agostinelli, Presidente dell'Accademia delle Scienze di Torino, per l'adesione data al Convegno e per l'ospitalità gentile ed accogliente.

Naturalmente tutti i membri dell'istituto si sono adoperati per il successo di questa riunione. In particolare la presenza di Gleb Wataghin, a cui tutti tanto dobbiamo, è stata un grande piacere e una commozione per tutti noi. Nel ringraziare tutti coloro che ci hanno aiutato per la buona riuscita del Convegno, desidero rivolgermi in modo particolare, oltre che agli autori, anche agli ospiti illustri, in particolare ai professori K. Alder, E. Beltrametti, P. Caldirola, B. Ferretti, C. Rebbi, V. Telegdi, M. Tonin e G.C. Wick che hanno animato la riunione.

E' un piacere sottolineare l'aiuto entusiastico dell'amico professore

Filippo Ferrero, direttore della sezione di Torino dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare.

Il C.N.R., che ringrazio, ha fornito un contributo per la stampa degli Atti di questo convegno.

Vorrei infine ringraziare Rita Aimone, Marisa Garella, Adriana Guerrieri, Antonio Guerrieri, Benedetto Tencone e Italo Tricomi per l'organizzazione tecnica del convegno, non ultimo fattore della sua riuscita.

Vittorio de Alfaro

Trenta anni di vita presso l'Istituto Fisico

Tullio Regge *

I colleghi mi hanno affidato un compito molto imbarazzante, quello di sintetizzare in poche parole uno dei periodi più fruttuosi e più movimentati della attività del nostro istituto.

Un'altra fonte di imbarazzo è quella di scoprire di avere dei ricordi così vetusti da diventare interessanti. A parte queste considerazioni filosofiche posso vantarmi di essere giunto, come studente, prima ancora di Verde nel nostro glorioso istituto. Alcuni amici, tra cui il povero Giorgio Ghigo, prematuramente scomparso, mi avevano descritto in termini dorati l'atmosfera eccitante e la ventata di nuove idee portata dal nostro Gleb Wataghin. Ero allora studente del Politecnico, ottima scuola per ingegneri, in cui però ero ossessionato dalla triste necessità di dover produrre disegni e grafici, compito per cui mancavo di qualsiasi talento. Seguii dunque il consiglio e fui accettato come "studente interno" una figura giuridica di cui mi è sempre sfuggito il significato e l'importanza. Dopo un paio di mesi Wataghin mi annunciò che, se tutto andava bene, il nostro istituto avrebbe avuto tra i primi in Italia, una cattedra interamente dedicata alla fisica teorica, bisbigliando il nome di Verde come possibile candidato. Infine una fatidica mattina scorsi nel buio corridoio Wataghin che con la massima dignità urlava nell'orecchio di un distinto signore il nome di un altrettanto distinto giovanotto piazzato nei pressi. Così vidi per la prima volta Verde e per l'ultima il venerando Prof. Somigliana, ultranovantenne e sordissimo. Un'incontro emblematico, per pochi attimi il passato remoto ed il futuro prossimo del nostro istituto vennero a contatto, auspice il nostro Wataghin.

---

* Istituto di Fisica Teorica, Università di Torino, I.N.F.N., Sezione di Torino. Scuola di specializzazione di Fisica Nucleare, Università di Torino.

Va dato atto a Wataghin di avere guidato con mano sicura, con apertura di idee e con molto entusiasmo la fisica del nostro ateneo.

L'Istituto del 1949 presentava un aspetto drammatico, con le ferite della guerra recenti e visibili, con problemi immensi di ricostruzione. Io fui piazzato a lavorare nella presente aula B, non esistevano mobili né attrezzature. Un tavolo sgangherato, privo di ripiano sostituito da compensato era la mia scrivania. Privo di riscaldamento usavo un tubo di eternit attorno a cui avevo avvolto del filo di ferro che veniva poi direttamente collegato alla rete. Eppure l'atmosfera era piena di grandi aspettative e di eccitanti iniziative. Nei nostri corridoi circolavano fisici che poi avrebbero popolato le cattedere di tutta l'Italia (e basterebbe citare Gamba, Radicati, Cini, Caianiello) dimostrando la vitalità della fisica teorica torinese. L'ala nord, prospicente via Valperga Caluso, non era abitata, i corridoi erano solcati da canali in cui correvano fili percorsi da correnti e mal isolati; il freddo, il buio e le macerie l'avevano fatta chiamare "Siberia".

Al primo piano un pluviometro rattristava Ghigo al solo vederlo: "non contiene un solo tubo elettronico" era il suo commento.

All'ultimo piano mancava la sopraelevazione in cui è alloggiata la biblioteca, al suo posto esisteva un terrazzino da cui osservai al tramonto con un telescopio il transito di Mercurio sul Sole.

Erano tempi eroici in cui si permetteva la follia di organizzare corse automobilistiche assordanti nel Valentino, cui partecipò anche il leggendario Nuvolari. Sul luogo del sospirato nuovo edificio esisteva un giardinetto con cancello dotato di un meraviglioso stemma sabaudo, poi scomparso in seguito alle proteste di un collega saldamente repubblicano. Alla fine, già da tempo allievo di Verde e laureato, fui spedito a lavorare in una officina sotto la Siberia, nascosto dietro un tornio. Lavoravo benissimo senza seccatori. Già da tempo avevo capito che il lavoro sperimentale non faceva per me, dopo avere maneggiato alcuni microscopi, per pura curiosità, dovetti fuggire velocemente e cortesemente invitato a non fare più danni. Iniziai dunque la mia attività scientifica seria con un lavoro sui tre corpi sotto la direzione di Verde.

E con questo diventa impossibile evitare qualche commento sulla attività del nostro Verde, nonostante le diffide e le preghiere di non occuparci soverchiamente di lui, ricevute sia da me sia dai colleghi, dalla persona dello stesso Verde, notoriamente avversa alla pubblicità e agli onori della ribalta.

Verde giunse a noi dopo anni di attività a Zurigo presso la scuola di Pauli, un tirocinio durissimo sotto un grande fisico e Maestro non certo prono a teneri giudizi.

La cattedra di fisica teorica comportava gravi responsabilità di ricerca ma anche direttive di pianificazione. Per venire incontro a queste esigenze Verde attinse alle sue risorse di intelligenza ma anche di quieto professionalismo.

L'Italia, come tutti sappiamo, è piena di dilettanti entusiasti ed ha soprattutto bisogno di persone altamente qualificate nei ruoli direttivi. Il grande contributo alla fisica teorica torinese dato da Verde in questo ruolo di critico severo e demistificatore non sarà mai apprezzato a sufficienza. Ed io stesso ebbi a rendermi conto, purtroppo in ritardo, della giustezza di certe critiche e di certe gelide accoglienze ricevute da Verde in varie occasioni. E con questo rendiamoci conto che la direzione di un istituto, quando sia concentrata nelle mani di una sola persona come allora, richiede da questi non solo delle idee originali di ricerca ma anche doti profonde ed equilibrate di giudizio sulle persone che non tutti possiedono. E non a caso la sua direzione coincise con uno dei periodi più fruttuosi e brillanti nella storia del nostro Istituto.

E, vorrei aggiungere, possiamo ben dire che è anche stato periodo in cui, mancando i grossi computers, facevamo i calcoli con delle Marchant della Belle Epoque ma che al tempo stesso tutti possiamo ricordare con affetto ed orgoglio.

Fisica a Roma tra gli anni '30 e '40

Gian Carlo Wick *

Ho promesso all'amico de Alfaro di parlare dei miei ricordi sulla fisica a Roma negli anni fra il '30 e il '40. Non sarò certo il primo a rievocare quel periodo. Lo hanno fatto con particolare autorità Edoardo Amaldi da un lato ed Emilio Segré nel suo bel libro dedicato a Fermi. Se ciononostante l'impresa mi attira ancora, dirò che non è solo per imprudenza: ognuno ha un'esperienza propria delle cose e un punto di vista suo; può quindi sperare di aver da raccontare qualcosa di un po' diverso.

Si tratta, dopotutto, di un momento assai importante, forse decisivo, nella storia recente della fisica in Italia, e per di più di un periodo in cui il mondo della fisica non aveva ancora subito quel salto quantitativo nella scala delle operazioni, che ne ha così profondamente modificato le condizioni materiali e perfino un po' l'atmosfera stessa della ricerca. La differenza vi colpirà, spero, quando vi parlerò del congresso internazionale di fisica nucleare, a cui ebbi l'insperata fortuna di assistere nell'ottobre 1931 a Roma nell'Istituto di via Panisperna, oppure quando descriverò più avanti l'organizzazione e l'atmosfera che trovai nello stesso istituto, quando un anno dopo entrai a farne parte come assistente di Fermi. Basterà dirvi, per ora, che l'intero gruppo, guidato da Fermi e Rasetti sotto lo sguardo paterno del direttore prof. Corbino, non raggiungeva la dozzina, e questo, intendiamoci, includendo assolutamente tutti: professori, assistenti, laureandi, visitatori stranieri e personale tecnico-amministrativo. Non esagero: per esempio, le indispensabili segretarie, che sbrigano la corrispondenza e battono a macchina i manoscritti, non esistevano; a queste cose i fisici dovevan provvedere da sé. Vi era un

* Scuola Normale Superiore, Pisa.

solo (ottimo) meccanico: ho visto Fermi passar ore al tornio in officina diverse volte.

Prima di continuare su questo tema vorrei, però, estendere il mio sguardo ad altre università, un po' per completare il quadro dei fisici attivi in Italia in quegli anni e per ricordare vecchie amicizie e un po' anche, poiché mi si presenta per la prima volta l'occasione di parlarne qui a Torino, per sdebitarmi verso alcune persone che mi furono larghe di aiuto e consigli agli inizi della mia carriera. Il mio pensiero va anzitutto con profondo affetto e riconoscenza a Emilio Artom, mio professore in liceo; figura ben nota qui a Torino, ammirevole per la sua devozione all'insegnamento e per la vasta cultura, Artom mi rivelò il fascino della matematica e della fisica, e mi prestò libri e continuò a consigliarmi anche dopo il liceo. Entrato al biennio del politecnico continuai a interessarmi soprattutto di matematica; ricordo ancora le lezioni di geometria del prof. Fano per la loro eleganza, e l'interesse per i miei studi dimostratomi dal prof. Guido Fubini; quest'ultimo mi diede una cordiale lettera di presentazione per Courant, quando mi recai a Gottinga dopo la laurea con una borsa di studio. Mi laureai con una tesi sulla teoria elettronica dei metalli, argomento suggeritomi dal prof. Wataghin, che son lieto di veder qui tra voi. Il suo entusiasmo per la fisica moderna, che è stato un'ispirazione per molti, in Italia e in Brasile, era allora noto nell'ambiente fisico di Torino, ma non era ancora stato premiato con la nomina all'Università, come avvenne più tardi. Wataghin era allora insegnante all'Accademia Militare, ma ciononostante si occupò della mia tesi, mi diede utilissimi consigli su cosa leggere e funse poi da relatore non ufficiale al mio esame di laurea. Il relatore ufficiale, prof. Somigliana, che detestava la meccanica quantica e tuonava sovente contro la fisica moderna, accettò brontolando l'opinione favorevole di Wataghin, sino al punto di accettarmi poi come assistente un anno dopo, quando tornai dalla Germania.

Vi sorprenderà questa situazione della fisica teorica a Torino, divenuta poi uno dei centri più attivi del campo in Italia. Ma il primo passo in questa direzione avvenne solo l'anno dopo la mia laurea, colla istituzione della cattedra di fisica teorica e la chiamata di Enrico Persico da Firenze per coprirla. Con Persico strinsi poi una relazione cordiale nell'anno che passai a Torino di ritorno dalla Germania. Persico aveva lasciato a Firenze un ambiente assai più vivo; oltre a

Roma, Firenze fu negli anni trenta l'unico altro centro in Italia dotato di un gruppo consistente aperto ai nuovi indirizzi della fisica; basti ricordare i nomi di Rossi, Bernardini, Occhialini e Racah. Fermi stesso e Rasetti, prima di sistemarsi a Roma, erano stati per qualche tempo a Firenze, lasciandovi una traccia evidente. Se ora volgiamo lo sguardo ad altre università, incontriamo qua e là col passare degli anni degli sforzi isolati: individui forse attirati alla fisica atomica o nucleare dalla eco delle scoperte che avvenivano a Roma o fuori di Italia; presto o tardi questi finiranno per gravitare verso Roma. Così ricordo Cocconi che, interessato dalle prime ricerche sui mesoni, veniva da Milano per consigliarsi con Fermi sul suo programma di ricerca, e Ferretti che da Bologna attirò l'attenzione di Fermi pubblicando una nota che dimostrava una visione e una preparazione sorprendenti in uno cresciuto in un ambiente da noi considerato molto poco illuminato. Così Ferretti fu invitato a Roma, dove intanto, intorno al '40, una nuova generazione veniva formandosi, con Ageno, Cacciapuoti che era stato assistente di Segré a Palermo, e i giovanissimi Pancini, Piccioni e Conversi. Col '40 voglio chiudere questo elenco, ma non posso omettere, per la parte importante che ha avuto nello sviluppo successivo della fisica teorica qui a Torino, Mario Verde che, se non erro, quando già era cominciata la guerra divenne mio collaboratore a Roma in seguito a una lettera da Pisa del prof. Tonelli che me lo descriveva come un "giovane assai promettente per l'ingegno e la notevole cultura, anche al di fuori della fisica". Ricordo ancora con soddisfazione il lavoro che si fece insieme su un problema abbastanza difficile di diffusione dei neutroni in un mezzo moderatore.

A quasi tutti quelli che ho nominato e alla loro collaborazione all'opera infaticabile di Amaldi l'Italia deve quella seconda rinascita della fisica dalle rovine della guerra che voi tutti conoscete. Ma è ormai ora che, lasciando le premesse, io entri nel vivo dell'argomento e vi parli di via Panisperna.

Un'idea un po' meno vaga del gruppo romano me l'ero già fatta durante il mio soggiorno in Germania dopo la laurea. A Gottinga avevo incontrato Fermi, comparso brevemente per tenervi un seminario. Avevo udito commenti entusiastici sulla lucidità della sua esposizione e mi aveva colpito il contrasto fra il rispetto da cui Fermi era circondato all'estero e l'atteggiamento diffidente e direi quasi smorfioso

verso di lui di certi miei professori a Torino. La cosa mi divertiva e stizziva insieme: un tipico caso del classico: "Nemo propheta in patria"! Una ammirazione consimile avevo trovato in Heitler per il lavoro sperimentale di Rasetti sugli spettri Raman dei gas. Particolarmente interessanti – mi disse Heitler – erano le alternanze di intensità nella struttura di rotazione delle molecole d'azoto; queste alternanze parevano indicare che i nuclei di azoto obbediscono alla statistica di Bose-Einstein, in contrasto con le idee allora correnti sulla struttura del nucleo. Heitler aveva perfettamente ragione di attribuire un significato fondamentale a questo risultato di Rasetti. Esso preludeva infatti alla scoperta del neutrone, come del resto è ricordato in qualsiasi buon trattato di fisica nucleare.

Qualche mese dopo, a Lipsia, incontrai Amaldi, venuto a imparare sotto Debye le tecniche per lo studio della struttura della materia coi raggi X. Amaldi mi incoraggiò a cercare una posizione di assistente a Roma, una volta ultimato il mio anno in Germania. Il che non mi riuscì immediatamente; invece spesi l'anno accademico 1931-32 a Torino, come ho già detto. Passai quell'anno soprattutto preparandomi a lavorare nel campo della fisica nucleare. Era quello il momento in cui molti fisici teorici, e anche sperimentali, stavano spostando i propri interessi dal campo della spettroscopia e della struttura elettronica esterna dell'atomo a quello della fisica nucleare. Avevo avuto sentore di questo cambiamento nel mio soggiorno in Germania; si parlava apertamente del fatto che ormai le applicazioni più ovvie della meccanica quantica alla struttura degli atomi e delle molecole erano state fatte: le principali caratteristiche dei livelli atomici e molecolari, il legame omopolare, le cose più ovvie sulle proprietà dei metalli, il ferromagnetismo e così via erano ormai problemi chiariti nelle loro linee fondamentali; i fisici più intraprendenti in cerca di miniere non sfruttate cominciavano a volgere gli occhi altrove. Avendo udito più volte queste opinioni sia a Gottinga che a Lipsia, una volta sistemato nel mio quieto cantuccio a Torino, mi misi a leggere con grande attenzione il noto trattato di Rutherford, Chadwick e Ellis. Seppi solo più tardi che proprio allora Amaldi aveva organizzato a Roma un seminario sullo stesso argomento.

Era il momento in cui a Cambridge cominciava a funzionare l'acceleratore di Cockcroft e Walton, capace di accelerare protoni alla "fantastica" energia di quasi un milione di elettron-volt; due

poco noti americani progettavano acceleratori ancora più fantastici. Già da qualche tempo Fermi e Rasetti avevan deciso di spostare l'indirizzo delle loro ricerche verso la fisica nucleare. Così Rasetti venne a trovarsi ospite dell'istituto diretto da Lise Meitner, collo scopo di impratichirsi nelle tecniche per lo studio delle sostanze radioattive, proprio quando Chadwick doveva scoprire il neutrone. Qualche mese prima, nell'ottobre del 1931, era stato tenuto a Roma, per iniziativa di Fermi e Corbino e sotto l'egida dell'Accademia di Italia, quel congresso internazionale di fisica nucleare a cui ho accennato. Il numero dei partecipanti a questo "grande" congresso vi farà sorridere; presenti alle conferenze saranno state una sessantina di persone o poco più. Ma, come avveniva allora nei congressi di qualche importanza, la percentuale dei luminari della fisica tra i presenti era cosa da fare sgranare gli occhi. Non mi pareva vero di vedere da pochi metri di distanza le figure ora quasi leggendarie di Millikan, Bohr, Compton, Bothe, Mme Curie, Aston, Sommerfeld, Ehrenfest, Heisenberg, Pauli, Lise Meitner, Heitler, e così via.

Non occorre dirVi che questo convegno mi fece una grande impressione e che ne conservo un ricordo vivissimo. Segré ha scritto nel suo libro che, per ragioni fortuite, esso fu convocato al momento sbagliato, cioè qualche mese *prima* di varie scoperte fondamentali (il neutrone, l'elettrone positivo, ecc.). A me pare che proprio per questo quel momento fosse particolarmente interessante: la promessa di grandi cose era, per così dire, già nell'aria. Mancando il neutrone, per esempio, sembrava ancora inevitabile accettare l'elettrone come uno dei due costituenti basilari del nucleo, ma l'accoppiamento di questa ipotesi coi principî della meccanica quantica dava luogo alle ben note difficoltà (tra queste la statistica del nucleo d'azoto, a cui ho già accennato). Un'altra fonte di mistero era lo spettro *continuo* di energia degli elettroni espulsi dal nucleo nella disintegrazione beta. Non si sapeva bene come conciliare questo fatto colla conservazione dell'energia. In entrambi i casi la difficoltà sembrava connessa cogli elettroni nucleari da un lato e colla teoria quantica dall'altro lato. Infatti il paradosso dello spettro continuo si faceva più grave, una volta ammessa per il nucleo l'esistenza di livelli energetici discreti come nel caso dell'atomo. Eppure proprio in questo stesso congresso venivano presentate le prime chiare prove dell'esistenza di livelli cosiffatti.

L'estremo interesse suscitato da questi problemi traspare chiara-

mente dalle osservazioni presentate da Bohr nella discussione, che fortunatamente sono state preservate negli atti del convegno; posso raccomandare vivamente la lettura di queste osservazioni a chiunque si interessi alla storia delle idee sul nucleo atomico, poiché Bohr descrive la situazione di quel momento con quella straordinaria miscela di lucide intuizioni e volute oscurità che caratterizzano il suo modo di affrontare le questioni insolute nei momenti cruciali.

Altri miei ricordi su quel convegno hanno un interesse soprattutto personale, ma possono tuttavia servire come esempi dell'atmosfera di quei giorni. Ricordo per esempio che, grazie alle conoscenze già fatte in Germania, intendo Heitler e Heisenberg, e sebbene per gli altri fossi solo uno studentello sconosciuto, venni presentato a vari di quei luminari. Heitler in particolare, desiderando di fare la conoscenza di Majorana, mi propose di fungere da interprete, prendendo parte con loro due a un lunch, che fu assai interessante. Questi contatti con persone che ammiravo, mi diedero non solo grande soddisfazione, ma anche la sensazione di essere quasi entrato a "far parte del club". E questo, devo dire, è un punto ove la situazione oggi è un po' cambiata, e non per il meglio: senza dubbio allora la ristrettezza dell'ambiente dei fisici rendeva assai più facile stabilire relazioni personali.

Dicendo questo penso anche ai visitatori stranieri dell'istituto di Roma coi quali strinsi amicizia negli anni successivi; si tratta di nomi a voi ben noti: Bloch, Peierls, Møller, Placzek, Bhabha e così via. Conoscere queste persone significava allora per me essere in contatto con buona parte del mondo dei fisici teorici di allora.

Teatro dello storico convegno di cui vi ho detto, fu l'antico Istituto di fisica, non quello a voi noto nella nuova Città Universitaria. Quell'edificio che mi divenne ben famigliare in anni successivi, era assai diverso da come si concepisce un Istituto al giorno d'oggi. Esteriormente sembrava piuttosto un'abitazione privata, un'elegante villa o palazzina in un angolo tranquillo vicino al Viminale, da cui lo separava una fitta cortina di vegetazione. Vi si accedeva per una ripida salita da un cancello sulla via Panisperna. Al pian terreno vi erano, se ben ricordo, un'aula, uno stanzino per l'amministratore Zanchi, stanze con ripostigli per strumenti e l'officina, piuttosto piccola. Un ampio scalone portava al primo piano, dov'erano gli studi dei professori e assistenti, la biblioteca e varie stanze che fungevano da laboratori. In particolare vi era lo studio del direttore prof. Corbino,

e quello di Fermi, che ricordo assai bene, perché era il luogo dove sovente si svolgevano animate discussioni. Lì vicino, una porticina dava accesso a un altro istituto, di cui era direttore il prof. Trabacchi, un uomo d'oro che per anni prestò un aiuto costante e disinteressato alle ricerche di Fermi e compagni, considerandosi ripagato dalla coscienza di aver contribuito al loro successo. L'istituto di Trabacchi consisteva in realtà solo di un paio di stanze in cui venivano conservati e mantenuti in uno stato di perfetta efficenza vari strumenti di misura. Non starò a descrivere le apparecchiature di cui disponeva il *nostro* istituto. Non eran nulla di impressionante; ricordo soprattutto un paio di spettroscopi, tra cui un Hilger per lo studio dell'ultravioletto, che mi venne descritto come uno dei pezzi più costosi della collezione; con questo strumento Rasetti aveva ottenuto alcuni dei risultati a cui ho accennato.

Ho descritto l'Istituto, e ora verrò alle persone che ne costituivano il nucleo centrale, e cioè Fermi, Rasetti e i due assistenti Amaldi e Segré. Dirò anche qualcosa su Majorana che conobbi soprattutto durante il mio primo anno a Roma. Parlerò principalmente di Fermi, essendo questi, insieme a Rasetti, non soltanto per così dire il fondatore della scuola, ma anche la persona che buona parte dei presenti ha avuto meno l'occasione di conoscere personalmente. Al lato opposto, Amaldi e Segré sono ancora entrambi assai attivi e ben noti a tutti voi anche per contatti diretti.

Di tutti i fisici che ho conosciuto, Fermi è senza dubbio quello che ha esercitato su di me la più grande influenza, né potrebbe essere altrimenti, essendo io stato esposto giornalmente per alcuni anni non solo alle sue idee e opinioni, ma anche all'esempio dei suoi metodi di lavoro e della sua assoluta dedizione alla ricerca. La vita ha i suoi aspetti strani: mi rendo conto che per molti di voi Fermi è una figura di un lontano passato, di cui si conosce l'aspetto attraverso qualche sbiadita fotografia. Ciò è naturale; per me la sua fortissima personalità e le sue doti intellettuali sono un ricordo di ieri e il senso di pena per la sua prematura scomparsa mi ritorna nella sua intensità al solo pensarci.

Quando divenni suoi assistente, Fermi aveva appena compiuto trentun'anni; era nel pieno delle sue forze e aveva una resistenza fisica eccezionale alla fatica, una dote naturale senza dubbio, ma anche dovuta a una volontà inflessibile. Ricordo un particolare. Seppi più

tardi che in quegli anni Fermi soffriva di insonnia; ma la sua volontà di ferro trasformava questo inconveniente in un fattore positivo: a causa dell'insonnia, si svegliava di solito più presto di quanto non volesse; in tal caso si metteva a tavolino e lavorava per un'oretta o due, poi arrivava in Istituto alle otto e mezza, puntuale come un orologio. Durante il periodo più intenso delle ricerche sui neutroni, condotte insieme a tutto il "gruppo", Fermi usava quell'ora mattutina per meditare sul significato dei risultati ottenuti il giorno precedente. Così avvenne, per esempio, quando fu osservato per la prima volta l'effetto della paraffina sulla radioattività indotta da neutroni. Fu nelle prime ore della mattina seguente che Fermi intravvide il significato dell'effetto osservato; quando giunse in Istituto, ci spiegò l'ipotesi a cui era giunto. Ne seguì una discussione vivacissima col resto del gruppo; il piano di esperienze da farsi che si era abbozzato nella mente di Fermi nelle ore di insonnia, divenne così il piano di lavoro di tutto il gruppo per le settimane successive.

Dedicherò una certa attenzione ai metodi di lavoro di Fermi, perché penso che in essi sia la chiave anche del suo ruolo come grande maestro, da cui molti hanno imparato. Vi sono elementi nel successo di uno scienziato che non si possono copiare, la genialità per esempio. Lavorando accanto a Fermi veniva naturale di imitare l'evidente efficienza e razionalità dei suoi metodi di lavoro, anche senza un suo sforzo deliberato per insegnare o imporre agli altri i suoi metodi; Fermi era in fondo un grande individualista, ma il suo esempio era naturalmente contagioso. Il suo successo costituisce, secondo me, un esempio tipico di una combinazione armoniosa di doti naturali sia dell'intelligenza che del carattere, con un uso oltremodo efficiente delle proprie capacità; questa efficienza, ne son convinto, in Fermi era il frutto di scelte lungamente deliberate.

Dirò anzitutto del suo carattere; ho già accennato alla sua eccezionale tenacia e regolarità nel lavoro. Altri aspetti evidenti del suo carattere erano la calma, la cautela, l'istintiva razionalità e obiettività, e infine il gusto della semplicità.

La calma di Fermi è rimasta proverbiale, anche in America; vi sono a questo proposito noti episodi che non starò a ricordare. Fermi possedeva un notevole autocontrollo e non si eccitava facilmente; raramente l'ho visto arrabbiarsi, e semmai in un modo piuttosto anglosassone, senza alzare la voce né usare espressioni eccessive. Probabil-

mente gli pareva sciocco abbandonarsi alle emozioni, e in contrasto d'altronde colla sua cautela. E' ben noto che Fermi non amava commettere errori, e difatti ne faceva molto raramente. Ricordo per esempio il senso di invidia con cui assistevo alla sua capacità di fare un lavoro lungo e anche un po' noioso, come certi calcoli numerici, senza fare sbagli. Il metodo non è una sua invenzione, ma Fermi lo applicava con una costanza ammirevole: non si lasciava mai prendere dall'impazienza, calcolava in modo sistematico, senza affrettarsi e fermandosi a intervalli regolari a verificare il lavoro fatto. Questo faceva parte del suo culto dell'efficienza: non dimenticava mai che il lavoro affrettato si risolve per solito in una perdita di tempo, per rimediare agli errori non colti per tempo, se poi non restano addirittura nel risultato finale a disonore e scorno dell'autore! La stessa cautela usava nell'accettare le idee nuove o nuovi risultati di cui veniva a conoscenza; esaminava queste cose come un gioielliere esamina una pietra preziosa, rigirandola in tutti i modi per esaminarne i possibili difetti. Devo dire che qualche volta mi parve perfin troppo prudente, per esempio al tempo della scoperta dei "mesotroni" (gli odierni mesoni mu) da parte di Carl Anderson. In ogni caso, per lui la solidità del risultato veniva innanzi a tutto e questo gli procurò quell'aura meritata di semi-infallibilità di cui era circondato anche in America.

Un aspetto assai ammirato dello "stile" di Fermi era il gusto della semplicità. Questo (che si manifestava anche nella vita quotidiana) nel lavoro lo portava a servirsi degli strumenti più semplici atti a condurlo al risultato voluto. Dirò di questo anche più tardi a proposito del diverso stile sperimentale di Fermi e di Rasetti. Nel lavoro teorico, là dove altri avrebbero tirato in ballo profondi teoremi della teoria dei gruppi o altre dotte nozioni matematiche, Fermi quasi si divertiva a raggiungere il risultato con mezzi elementari; era in parte per lui una questione di gusto, o quasi una specie di civetteria. Ma era anche, e questo è importante, una di quelle scelte a lungo meditate a cui ho accennato, e corrispondente al suo atteggiamento estremamente pragmatico. Aveva deciso assai presto di ricavare il massimo dalle proprie risorse naturali applicando il principio dell'economia dello sforzo. Dava perciò il massimo peso al raggiungimento del risultato — purché fosse giusto — assai meno all'eleganza o alla raffinatezza del metodo usato; i fronzoli non lo interessavano. Inten-

diamoci, questo era lo stile che si era imposto, ma, da quell'uomo ragionevole che ho descritto, sapeva anche apprezzare in altri uno stile diverso se accoppiato a un talento eccezionale, come nel caso di Majorana o Rasetti. Il suo particolare stile ebbe tuttavia un'importanza particolare nella sua straordinaria evoluzione da fisico teorico "of the deepest dye" a "uno dei pochi all around physicists in esistenza, una specie oggi quasi estinta". Le due descrizioni sono di Rutherford e Rabi, rispettivamente. A questa evoluzione io ebbi la fortuna di assistere nei miei anni romani.

Ricorderò per la cronologia che sino al '32 il contributo di Fermi alla fisica era stato soprattutto nel campo della teoria. E infatti, arrivando a Roma, lo trovai occupato a ripulire insieme a Segré alcune questioni lasciate aperte dal suo noto lavoro sulla teoria della struttura iperfina. E così anche l'anno successivo lo vide occupato soprattutto a sviluppare la sua nota teoria della radiazione beta. Fu all'inizio del '34, coi lavori sulla radioattività indotta da neutroni, che l'attività di Fermi cominciò a rivolgersi prevalentemente al lavoro sperimentale. Naturalmente, una volta avvenuta questa transizione, i suoi interessi e la sua preparazione teorica permisero sempre a Fermi di elaborare teoricamente i risultati ottenuti, ricollegandoli ad altri fatti già noti e inquadrandoli in una visione teorica complessiva.

Non vi è alcun dubbio che questa eclетticità di Fermi, questa sua capacità di fare la spola tra il lavoro teorico e quello sperimentale, sia stata una delle principali componenti della sua forza; è un tema costante delle valutazioni della sua opera che ho avuto occasione di sentire da più di un fisico straniero, per esempio: "altri teorici della sua generazione, come Dirac o Heisenberg, avranno contribuito alla meccanica quantica intuizioni più profonde e fondamentali, ma nessuno possiede un dominio così vasto di tanti aspetti della fisica come lo ha Fermi". Un altro esempio: "E' impossibile non fare il tifo per Fermi — mi disse un suo antico allievo di Chicago — non puoi entrare in un campo della fisica moderna senza trovarci la sua impronta".

E' davvero così; e probabilmente uno dei segreti di Fermi, la ragione per cui riusciva ancora a passare facilmente da un campo all'altro, quando gli altri non ce la facevano più, sta proprio nel fatto già ricordato che le tecniche superraffinate non esercitavano su di lui un fascino particolare. Riducendo la tecnica ai suoi elementi essen-

ziali riusciva a dominarla anche in campi molto diversi. Evidentemente il suo successo era anche il risultato di una scelta assai oculata dei problemi a cui meglio si prestavano i suoi metodi di lavoro. Il suo caso è insomma l'opposto di quello di tanta gente di talento che finisce per concludere assai meno di quel che potrebbe, disperdendosi in sforzi mal diretti. Non sorprende se la semplicità dei mezzi con cui otteneva i suoi risultati, spesso suscitava l'invidia dei suoi colleghi.

Tutta questa apologia non deve farvi pensare che io consideri i metodi di lavoro che ho descritto, come una specie di ricetta universale, buona per tutti. Fermi stesso, come avrete capito, era troppo ragionevole per non saperlo e la sua obiettività lo portava ad apprezzare forme di talento diverse da quelle da lui coltivate, come ora dirò venendo a due altri fisici da me conosciuti a Roma.

E' nota l'ammirazione sempre manifestata da Fermi per la genialità di Majorana, di cui riconosceva senza la minima invidia la superiore facilità nelle questioni matematiche più astruse (lo stesso rispetto, mi si dice, più tardi Fermi ebbe a dimostrare verso J. von Neumann). Il fatto che Majorana avesse domestichezza con la non troppo amata teoria dei gruppi evidentemente non lo turbava. Il genio di Majorana non si limitava alla matematica. Segré ricorda nel suo libro come, prima ancora delle note esperienze di Chadwick, Majorana avesse intuito il vero significato delle esperienze in cui i coniugi Curie-Joliot avevano osservato, senza rendersene bene conto, effetti dovuti ai neutroni. Ma questo avvenne negli anni precedenti la mia andata a Roma, quando Majorana era ancora un frequentatore abbastanza assiduo dell'istituto di via Panisperna. Nel primo anno da me passato a Roma lo si vedeva ogni tanto e così potei rinnovare con lui la conoscenza già fatta durante il convegno internazionale. Ma stava già diradando le sue visite, forse già preso da quello stato di amarezza e quel bisogno di solitudine che dovevano dominare negli ultimi anni della sua vita. Più tardi poi, dopo essere stato a Copenhagen e in Germania, smise completamente di farsi vedere. L'unico contatto che io ebbi allora con lui fu attraverso Giovanni Gentile jr., che era stato prima di me a Roma e che io avevo conosciuto a Lipsia. Gentile era amico di famiglia di Majorana e poteva visitarlo a casa quando veniva a Roma. Da lui l'Istituto aveva notizie di Majorana saltuariamente. Ricomparve brevemente prima di venir nominato professore a Napoli; mi raccontò ancora il lavoro appena compiuto sulla teoria simme-

trica dell'elettrone e positrone, che conteneva anche le sue idee poi ben note sul neutrino. Non parlerò delle sue vicende successive. E' una storia assai triste e non ne so nulla più di voi, cioè nulla più di quanto è stato scritto (e anche fantasticato) da varie parti. Ma, tornando all'anno in cui lo vidi più volte, dirò che questi contatti mi bastarono a constatare la straordinaria versatilità e rapidità delle sue operazioni mentali. Constatai anche il suo atteggiamento ultracritico e sottilmente ironico, che si rivolgeva non solo verso gli altri, ma anche verso il suo stesso lavoro. Ma era troppo cortese e corretto per esercitare la sua ironia su un inesperto, e anzi si interessò con parole incoraggianti al lavoro che stavo facendo, e che riguardava il momento magnetico di una molecola di idrogeno nei suoi vari stati di rotazione. Mi diede anche utili consigli riguardo a certi calcoli numerici che il problema richiedeva, suggerendomi l'uso di un'autofunzione diversa da quella (di Heitler-London) che avevo usato. Dopo aver ascoltato quale valore avessi ottenuto nel primo calcolo, osservò: "Sì, questo è probabilmente un limite superiore; l'altra autofunzione darà un limite inferiore, che sarà notevolmente più piccolo". Rimasi piuttosto sorpreso; come faceva a saperlo? Ecco dunque la famosa intuizione di Majorana! Ma quando mi spiegò le sue ragioni, mi convinsi che eran del tutto razionali. Inutile aggiungere che la previsione di rivelò poi perfettamente corretta.

Dirò ora di Rasetti, poiché penso che pochi di voi abbiano avuto occasione di conoscerlo da vicino, sebbene sia ancora attivissimo; ma da molti anni ha lasciato la fisica, dedicandosi a una sua antica passione per le scienze biologiche. Ho già accennato a lui e avrete capito che negli anni di cui parlo la sua autorità nel gruppo era pari a quella di Fermi. A dire il vero, i loro talenti erano assai diversi e si completavano a vicenda. Rasetti si divertiva molto a ostentare una completa ignoranza su questioni un po' astratte nella teoria quantica. In particolare sosteneva essere impossibile per lui capire cosa fossero gli operatori di creazione e distruzione. Aveva introdotto nel gergo scherzoso dell'Istituto un ordine dei "cavalieri della stella polare" ai quali spettava appunto di sapere quelle cose. Ricordo che quando voleva un po' canzonarmi, soleva affibbiarmi l'appartenenza all'ordien, che invece negava risolutamente a se stesso. Sia che uno voglia, o non voglia, prendere sul serio queste professioni di incapacità, sta il fatto che, a differenza di Fermi, Rasetti era in modo evidentissimo in

primo luogo lo sperimentatore nato, dotato di una meravigliosa facilità nel progettare e costruire apparecchiature che sotto le sue mani si comportavano con una docilità inconsueta. Vederlo lavorare il vetro o il pyrex era per me uno spettacolo divertente come quello dei soffiatori che si esibiscono nelle vetrerie di Murano. La sua competenza e virtuosità come spettroscopista era proverbiale a Pasadena come in Germania. Nel periodo passato a Berlin-Dahlem nell'istituto diretto da Lise Maitner si era impadronito in brevissimo tempo di varie tecniche, come la separazione del polonio e l'uso delle camere di Wilson, e aveva poi importato a Roma queste tecniche che riuscirono assai utili nelle ricerche sui neutroni. Sia ben chiaro che il ruolo non si limitava a quello di un tecnico raffinato; era altrettanto quanto Fermi un fisico nel pieno senso della parola e Fermi aveva di lui un'opinione altissima; ma la differenza di stile nello sperimentare era assai evidente. Ricordo ancora alcuni episodi divertenti da cui traspare questa differenza; ricordo il sorriso paziente di Fermi nell'ascoltare le canzonature di Rasetti per un contatore di Geiger-Müller, che Fermi aveva fabbricato colle sue mani quando nei primi mesi del '34 si stava preparando alle prime esperienze sulla radioattività indotta da neutroni. E' ben noto che la prima virtù di un contatore è quella di avere un buon "pianerottolo", un intervallo di tensione entro il quale esso dà un conteggio costante e quindi attendibile. Il contatore costruito da Fermi, diceva sghignazzando Rasetti, non soltanto era bruttissimo, ma possedeva un pianerottolo quasi invisibile. Fermi ascoltava sorridente; ma nei giorni seguenti, nonostante le prese in giro, avrebbe iniziato pazientemente le prime esperienze, ottenendo qualche risultato incoraggiante. Aggiungerò che più tardi Rasetti e Amaldi persuasero Fermi a sostituire il brutto contatore con altri assai migliori, ma credo prorpio, se la memoria non mi inganna, che i primi effetti di radioattività indotta da neutroni siano stati osservati con quel bruttissimo contatore.

Il tempo ormai stringe e comincerò a tagliar corto. Ho nominato più volte Amaldi e Segré; la posizione eminente da entrambi raggiunta richiederebbe che io dedicassi loro maggior tempo; ma probabilmente vi racconterei cose che già sapete. D'altra parte sarebbe ingiusto non nominare nemmeno alcune altre persone. Alle ricerche sui neutroni presero anche parte D'Agostino, il chimico a cui si deve una parte del lungo e paziente lavoro di separazione e identifi-

cazione degli isotopi radioattivi, e Bruno Pontecorvo, poi divenuto un fisico assai noto. Quando lo incontrai per la prima volta era uno dei due laureandi in Istituto; l'altro era Eugenio Fubini, figlio dell'illustre matematico e cugino del nostro ottimo e comune amico Sergio. Con i due laureandi, i più vicini a me per età anzianità in istituto, strinsi subito un'amicizia cordiale. Fubini doveva ben presto lasciare la fisica pura e fare una brillante carriera nel campo dell'elettronica. Pontecorvo invece, come ben sapete, prese parte molto attiva alle ricerche sui neutroni sino al 1936; quando l'intensificarsi della spinta razzista nel fascismo lo indusse a rifugiarsi a Parigi, dove continuò nella ricerca presso l'istituto Curie sino all'invasione tedesca.

A Roma in quegli anni conobbi altri giovani teorici, come Leo Pincherle, Renato Einaudi che poi passò alla meccanica razionale. Conobbi anche Ugo Fano che era cugino di Racah; con entrambi divenni più tardi compagno di gite in motagna, di cui conservo piacevoli ricordi. La carriera di Racah vi sarà ben nota; Fano è stato per molti anni un fisico assai produttivo al Bureau of Standards per poi passare al Fermi Institute dell'Università di Chicago.

Vorrei ora chiudere con alcune osservazioni sull'evoluzione delle tecniche sperimentali riattaccandomi alle ultime cose dette su Rasetti. Quell'episodio dà forse un'idea un po' esagerata, ma tuttavia veritiera, della semplicità delle apparecchiature usate a Roma nei lavori sui neutroni. (Tra quelle più complicate ricordo la camera di Wilson costruita da Rasetti e un amplificatore proporzionale usato da Amaldi per studiare eventuali reazioni (n,alfa)). Il grosso delle esperienze venne fatto secondo quello schema ormai noto a tutti, poiché è entrato a far parte delle nozioni generali di fisica nucleare: sorgente di neutroni al berillio, "pizza" di paraffina per il rallentamento, lastrina dell'elemento irradiato, eventualmente con assorbitore interposto; dopo l'irradiazione la lastrina veniva posta su una camera di ionizzazione per misurarne la radiazione beta indotta. Lo scopo delle misure era quello di determinare la natura dell'elemento radioattivo prodotto, la sua vita media, l'assorbimento e così via. Ricorderò che queste esperienze condussero non solo alla scoperta di un numero enorme di radioelementi che han permesso in seguito un gran numero di studi, ma anche a quella delle risonanze neutroniche e alla loro interpretazione nel modello di Bohr; si può dire che aprirono uno o due capitoli nuovi nella fisica nucleare. E' legittimo,

anche se un po' unfair, confrontare il costo per unità di informazione di quelle esperienze con i costi odierni. Il fattore imponderabile in questo confronto è l'interesse scientifico dei dati; quanto più interessante è misurare la vita media di una particella che non quella di certi radioelementi? Ma se ci limitiamo a misurare il significato statistico dei dati, che dipende sostanzialmente dal numero di eventi contati, il confronto è evidentemente sconcertante. Non fraintendetemi; questo non è uno dei tanti attacchi all'alto costo della fisica delle alte energie, di cui sono sempre stato fautore. Ma è, se volete, semplicemente una constatazione: com'è cambiato il mondo! Non sono poi così pessimista, poiché son sicuro che anche in avvenire si potranno ottenere risultati importanti con spese tollerabili se nel pensare nuove esperienze si farà anche uso di quella stessa fantasia e immaginazione di cui ci han lasciato esempio le generazioni passate. Ho voluto oggi soltanto darvi un'idea dell'atmosfera della fisica, come si faceva in quelle poche stanze nell'Istituto di via Panisperna, molti molti anni fa.

Diffusione elastica di fotoni da nuclei

Wanda Maria Alberico e Alfredo Molinari *

A Mario Verde, maestro di scienza e di dignità

1. Introduzione

I problemi della fisica fotonucleare, parzialmente accantonati per le difficoltà di reperire sorgenti di fotoni, con energie ben definite ed "interessanti", di sufficiente intensità, hanno destato recentemente un rinnovato interesse grazie agli esperimenti di diffusione elastica (Compton) di fotoni sul ^{208}Pb eseguiti in Mainz [(1)] e soprattutto in seguito alla proposta di utilizzare la luce di sincrotrone del costruendo LEP [(2)].

Appare pertanto auspicabile un'indagine teorica più approfondita del processo di diffusione fotonucleare, sia elastica che inelastica.

Nel presente articolo, proseguendo l'analisi teorica della ref. (1), dove i parametri della componente risonante dell'ampiezza di diffusione fotone-nucleo vengono fissati mediante un'interpolazione dei dati di assorbimento, si dedica particolare attenzione ai termini di gauge (sul cui significato torneremo più avanti) nella matrice di diffusione. Questi termini vengono calcolati nell'ambito di un modello microscopico non relativistico del nucleo, sfruttando i teoremi di bassa energia (LET) già proposti in passato [(3)] per una loro valutazione approssimata.

I termini di gauge sono essenziali al fine di riprodurre correttamente i dati sperimentali di diffusione di fotoni da nuclei, ma in più essi offrono la possibilità di:

a) determinare in modo indipendente il fattore di accrescimento della regola di somma di dipolo, rappresentando così un test di con-

* Istituto di Fisica Teorica dell'Università di Torino I.N.F.N., Sezione di Torino.
Scuola di Specializzazione in Fisica Nucleare, Università di Torino.

sistenza tra la parte risonante e quella di gauge nella matrice di diffusione;
b) stabilire un'importante connessione tra la diffusione di fotoni e quella di elettroni (la prima consente, infatti, di misurare direttamente la trasformata di Fourier della distribuzione di carica nucleare, senza problemi di distorsione delle funzioni d'onda del fotone);
c) determinare, ovviamente entro i limiti del modello proposto, l'entità e la distribuzione di pioni carichi all'interno del nucleo.

In questo lavoro vengono discussi in modo approfondito i punti a) e b), mentre ci limitiamo a sfiorare il punto c). Inoltre, per completezza, dedichiamo la seconda sezione ad illustrare le caratteristiche principali della radiazione di sincrotrone associata al LEP.

2. La radiazione di sincrotrone

Le proprietà della radiazione di sincrotrone (R.S.) associata al LEP, il grande anello di accumulazione per elettroni e positroni di progettata costruzione al CERN, sono elencate nella tabella I.

Tabella 1

E	I	B	ϵ_c	dP/ds	$\left.\dfrac{d^3 n}{d\phi\, d\psi\, d\epsilon/\epsilon}\right\vert_{\psi=0,\ \epsilon=\epsilon_c}$
(GeV)	(mA)	(T)	(MeV)	(kW/m)	(s mrad^2 %bw)$^{-1}$
86	9.15	.081	0.40	0.56	$\sim 6.9 \times 10^{15}$
130	6.11	.123	1.37	1.96	$\sim 1.3 \times 10^{16}$

Radiazione di sincrotone emmessa dai magneti del LEP:
Energia (E) e corrente (I) del fascio di elettroni; campo magnetico dei magneti (B); energia critica dei fotoni (ϵ_c) e potenza totale irradiata per unità di lunghezza orbitale (dP/ds); luminosità centrale del fascio di fotoni irradiata per secondo e per mrad^2 di apertura angolare in una banda relativa dell'1% all'energia critica.

L'energia critica della R.S. è definita come

$$\epsilon_c = \frac{3}{2} \hbar c \frac{\gamma^3}{\rho}, \qquad (2.1)$$

dove γ è il fattore relativistico per gli elettroni e il raggio di curvatura del LEP è $\rho = 3544.5$ m. Sebbene i fotoni della R.S. rappresentino, invero, un fascio di ragguardevoli intensità e collimazione, nonché quasi totalmente polarizzato (linearmente nel piano del LEP), essi sono troppo "soffici" per ricerche di fisica nucleare.

L'applicazione di magneti "wiggler", senza interferire con l'utilizzo principale del fascio di elettroni nel LEP, migliora drasticamente la situazione, producendo fotoni polarizzati con energie fino a 100 MeV (si veda la tabella II).

Tabella 2

Wiggler	E	I	B	ϵ_c	$\Delta\phi_B$	P_w	Intensità
	(GeV)	(mA)	(T)	(MeV)	(mrad)	(kW)	$(\text{s mrad}^2\ \%\text{bw})^{-1}$
magneti	86	9.15	2	9.8	0.35	17.3	$\sim 4 \times 10^{15}$
normali	130	6.11	2	22.5	0.23	26.3	$\sim 9 \times 10^{15}$
magneti	86	9.15	4	19.7	1.2	116.	$\sim 4 \times 10^{15}$
superc.	130	6.11	4	45.0	0.8	177.	$\sim 9 \times 10^{15}$

Parametri della radiazione emessa da magneti wiggler:
energia critica ϵ_c, angolo di deviazione orizzontale $\Delta\phi_B$, potenza totale P_w, intensità dei fotoni per secondo, per mrad^2 entro una banda di energie dell'1%.

Simili fasci di fotoni possono offrire l'occasione per eseguire esperienze di diffusione Compton e Raman da nuclei, un campo ancora poco esplorato per la scarsa intensità dei fotoni disponibili nel passato.

Tuttavia solo raggi γ monocromatici possono fornire risultati veramente interessanti, mentre la R.S. possiede uno spettro continuo, che si può parzialmente monocromatizzare mediante un "ondulatore", riducendo però notevolmente l'energia dei fotoni. Un'altra soluzione a questo problema è offerta dalla diffusione di Bragg della R.S. su un cristallo, ma anche questo metodo può fornire solo fotoni di bassa energia, se si desidera altresì un'elevata intensità.

Nella speranza che queste difficoltà possano essere superate, pensiamo che il problema di una descrizione microscopica accurata della diffusione di fotoni possa destare un rinnovato interesse nell'ambito della fisica nucleare. In quest'ottica, ci occupiamo qui, in particolare, della diffusione elastica.

3. La matrice di diffusione fotone-nucleo

Assumendo come Hamiltoniana d'interazione

$$\hat{\mathrm{H}}_{\mathrm{int}} = -\int d\vec{r}\, j_\mu(\vec{r}, t)\, \mathrm{A}^\mu(\vec{r}, t), \tag{3.1}$$

dove $\mathrm{A}_\mu = (\varphi, \vec{\mathrm{A}})$ è il potenziale elettromagnetico e $\mathrm{j}_\mu = (\rho, \vec{\mathrm{j}}/c)$ la densità di corrente nucleare, la matrice di diffusione, all'ordine perturbativo più basso, si scriverà

$$S^{(2)} = -\frac{2\pi}{V\hbar\sqrt{\omega\,\omega'}}\,\epsilon_\mu\,\epsilon'_\nu \iint d^4x\, d^4y\, e^{-ik\cdot x} e^{ik'\cdot y} \langle f\,|\,T\{j^\mu(x)\, j^\nu(y)\}|\,i\rangle \tag{3.2}$$

con $x_\mu = (\vec{x}, ct)$, mentre $k_\mu = (\vec{k}, \omega/c)$, $k_\nu = (\vec{k}', \omega'/c)$ sono i quadrivettori energia-impulso del fotone iniziale e finale, di polarizzazione ϵ_μ e ϵ'_ν, rispettivamente; V è il volume di normalizzazione e T indica il prodotto temporalmente ordinato.

Il quadrivettore densità di corrente e carica nucleare, che obbedisce l'equazione di continuità

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu(\vec{r}, t) = 0, \tag{3.3}$$

si può scrivere, per nucleoni estesi e trascurando le correnti di scambio, come segue

$$\rho(\vec{r}) = e \sum_{k=1}^{A} \left\{ \frac{1}{2} + t_z(k) \right\} f_{\mathrm{E}}(|\vec{r} - \vec{r}_k|) \tag{3.4a}$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{e}{2} \sum_{k=1}^{A} \left\{ \frac{1}{2} + t_z(k) \right\} [\vec{v}_k\, f_E(|\vec{r} - \vec{r}_k|) + f_E(|\vec{r} - \vec{r}_k|)\, \vec{v}_k] + + \sum_{k=1}^{A} \frac{e\hbar}{2M}\, g_s(k)\, \vec{\nabla} \times \vec{s}_k\, f_M(|\vec{r} - \vec{r}_k|), \tag{3.4b}$$

dove g_s è il fattore giromagnetico di spin del nucleone

$$g_s = \frac{1}{2}(g_p + g_n) + t_z(g_p - g_n) \tag{3.5}$$

($g_p = 2\mu_p = 5.59$ per il protone, $g_n = 2\mu_n = -3.82$ per il neutrone) e

$f_E(|\vec{r}-\vec{r}_i|)$, $f_M(|\vec{r}-\vec{r}_i|)$ sono le trasformate di Fourier dei fattori di forma elettrico e magnetico del nucleone.

Con tecniche standard la (3.2) si può riscrivere nella forma

$$S_{fi}^{(2)} = -\frac{2\pi\hbar c^2}{V\sqrt{\omega\omega'}}\, 2\pi i\,\delta(E_0+\hbar\omega-E_f-\hbar\omega')\,\epsilon_\mu\epsilon'_\nu\, T^{\mu\nu} \quad (3.6)$$

essendo

$$T^{\mu\nu} = \int d\vec{x}\, d\vec{y}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{y}} \sum_n \left\{ \frac{\langle N^*|j^\nu(0,\vec{y})|n\rangle\langle n|j^\mu(0,\vec{x})|0\rangle}{E_0-E_n+\hbar\omega+i\Gamma_n/2} + \right. \left. + \frac{\langle N^*|j^\mu(0,\vec{x})|n\rangle\langle n|j^\nu(0,\vec{y})|0\rangle}{E_0-E_n-\hbar\omega'+i\Gamma_n/2} \right\}. \quad (3.7)$$

Nella (3.7) gli stati intermedi $|n\rangle$ rappresentano stati nucleari eccitati con energia E_n e larghezza Γ_n ; il processo è illustrato dai diagrammi (a) e (b) di Fig. 1.

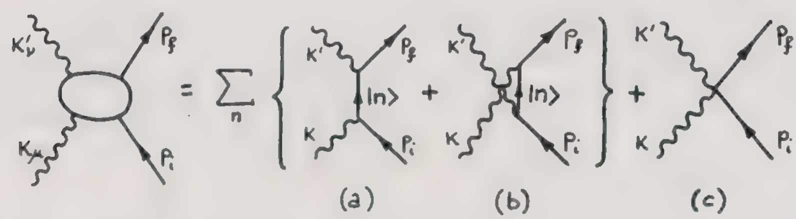


Figura 1 - Diagrammi dell'ampiezza di diffusione di un fotone da un nucleo.

L'ampiezza di diffusione (3.7) non è invariante di gauge poiché, pur valendo la (3.3), si ha

$$k_\mu k'_\nu \int d^4x\, d^4y\, e^{-ik\cdot x}\, e^{ik'\cdot y}\, \langle N^*|T\{y^\mu(x) j^\nu(y)\}|0\rangle = = \frac{i}{\hbar c}\int d^4x\, d^4y\, e^{-ik\cdot x}\, e^{ik'\cdot y}\, \delta(x_0-y_0) \langle N^*|[\rho(y), [\hat{H}, \rho(x)]]|0\rangle . \quad (3.8)$$

Per ristabilire l'invarianza di gauge occorre aggiungere a $T^{\mu\nu}$ un controtermine $S^{\mu\nu}$ tale che

$$k_\mu k_\nu (T^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}) = 0; \tag{3.9}$$

questa relazione, tuttavia, fissa unicamente le componenti longitudinali dei termini di gauge $S^{\mu\nu}$ e soltanto nel limite $\omega \to 0$, $\omega' \to 0$ (teoremi di bassa energia).

Per un'Hamiltoniana nucleare non relativistica con forze a due corpi aventi parziale carattere di scambio (alla Majorana)

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{A} \frac{P_i^2}{2M} + \sum_{i<j=1}^{A} [V_W(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + V_M(\vec{r}_i - \vec{r}_j) P_{ij}] \tag{3.10}$$

(P_{ij} è l'operazione di scambio per le coordinate spaziali), $S_{\mu\nu}$ si può separare in una parte cinetica

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu}^{\text{kin}} &= -r_0\, \delta_{\mu\nu} \langle 0| \sum_{i=1}^{A} \left\{ \frac{1}{2} + t_z(i) \right\} e^{-i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}_i} |0\rangle \\ &= -r_0\, \delta_{\mu\nu}\, Z F_{el}(\vec{q}) \end{aligned} \tag{3.11}$$

e in una parte di scambio

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu}^{\text{exch}} = -r_0 \frac{Mc^2}{(\hbar c)^2} \langle 0| \sum_{i<j=1}^{A} & \{t_z(i) - t_z(j)\}^2 (r_i - r_j)_\mu (r_i - r_j)_\nu \\ & e^{i \frac{\vec{q}}{2} \cdot (\vec{r}_i + \vec{r}_j)}\, j_0 \left[\frac{\vec{k}}{2} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right] j_0 \left[\frac{\vec{k}'}{2} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right] \\ & V_M (\vec{r}_i - \vec{r}_j) P_{ij} |0\rangle. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nelle formule (3.11) e (3.12) $r_0 = e^2/Mc^2$, $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$, $F_{el}(\vec{q})$ è il fattore di forma elastico per la distribuzione di carica nucleare e j_0 la funzione sferica di Bessel di ordine zero.

Si noti che, diversamente dalla (3.11), la (3.12) non dipende solo da $\vec{q}$, ma da $\vec{k}$ e $\vec{k}'$ separatamente e non è diagonale negli indici tensoriali μ e ν. Tuttavia si può utilizzare (nel calcolo di $S_{fi}^{(2)}$) l'identità

$$(\vec{\epsilon} \cdot \vec{r}_{ij})(\vec{\epsilon}' \cdot \vec{r}_{ij}) = \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}'\, r_{ij}^2/_3 - (\vec{\epsilon} \times \vec{r}_{ij}) \cdot (\vec{\epsilon}' \times \vec{r}_{ij}) \tag{3.13}$$

e l'ultimo termine non contribuisce in un sistema sfericamente simmetrico; inoltre, per energie dei fotoni incidenti non superiori a

~ 140 MeV, si può approssimare il prodotto $j_0(\vec{k}\cdot(\vec{r}_i-\vec{r}_j)/2)\,j_0(\vec{k}'\cdot$
$\cdot(\vec{r}_i-\vec{r}_j)/2)$ con l'unità, nel qual caso

$$S^{\text{exch}}_{\mu\nu}=-r_0\,\frac{Mc^2}{(\hbar c)^2}\,\delta_{\mu\nu}\langle 0|\sum_{i<j=1}^{A}\{t_z(i)-t_z(j)\}^2\,\frac{1}{3}(\vec{r}_i-\vec{r}_j)^2$$
$$e^{-i\frac{\vec{q}}{2}\cdot(\vec{r}_i+\vec{r}_j)}\,V_M(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\,P_{ij}|0\rangle=-r_0\,\delta_{\mu\nu}\,Z\,F_{\text{exch}}(\vec{q}),\tag{3.14}$$

che definisce $F_{\text{exch}}(\vec{q})$.

In conclusione notiamo esplicitamente che mentre $T^{\mu\nu}$ (equaz. (3.7)) è, in generale, una quantità complessa, i termini di gauge (3.11) e (3.12) sono reali, corrispondendo alla diffusione del fotone a tempi iniziale e finale uguali (cioè senza propagazione); per questo motivo essi vengono anche detti termini di contatto e si possono rappresentare col diagramma (c) della Fig. 1.

4. Il modello

L'ampiezza di diffusione fotone-nucleo nel caso elastico, dipende dall'energia $E=\hbar\omega$ del fotone incidente e dall'angolo di diffusione θ.

Il consueto sviluppo di S_{fi} in multipoli di carattere elettrico e magnetico consente di fattorizzare la dipendenza dall'angolo di diffusione. Scriveremo pertanto la sezione d'urto elastica per fotoni polarizzati come [4]

$$\frac{d\sigma^p(E,\theta)}{d\Omega}=\left|\sum_{\alpha,L} S_{fi_{\alpha,L}}(E,\theta=0)\,g^p_{\alpha,L}(\theta)\right|^2\tag{4.1}$$

dove L è la multipolarità, α indica il carattere elettrico o magnetico, p è la polarizzazione ($p=1$ per fotoni polarizzati parallelamente al piano di diffusione, $p=-1$ per fotoni polarizzati perpendicolarmente).

Più in generale, per fotoni non polarizzati,

$$\frac{d\sigma(E,\theta)}{d\Omega}=\frac{1}{2}\left\{(1+p)\frac{d\sigma^{\parallel}(E,\theta)}{d\Omega}+\right.$$
$$\left.+(1-p)\frac{d\sigma^{\perp}(E,\theta)}{d\Omega}\right\}.\tag{4.2}$$

Le espressioni di $g^{p}_{\alpha, L}(\theta)$ per i primi tre multipoli elettrici e magnetici sono riportate in tabella III.

Tabella III

α	L	p	$g^{p}_{\alpha,L}(\theta)$	α	L	p
E	1	+1	$\cos\theta$	M	1	−1
E	1	−1	1	M	1	+1
E	2	+1	$2\cos^2\theta - 1$	M	2	−1
E	2	−1	$\cos\theta$	M	2	+1
E	3	+1	$(15\cos^3\theta - 11\cos\theta)/4$	M	3	−1
E	3	−1	$(5\cos^2\theta - 1)/4$	M	3	+1

Dipendenza angolare della matrice di diffusione per multipoli elettrici e magnetici con L = 1, 2, 3.

Per quanto riguarda l'ampiezza di diffusione elastica fotone-nucleo in avanti, in accordo con la discussione della sezione precedente, essa verrà convenientemente separata in un termine risonante (corrispondente alla (3.7)) e un termine di gauge:

$$S_{fi}(E, \theta=0) = S_{fi}^{\text{ris}}(E, \theta=0) + S_{fi}^{\text{gauge}}(E, \theta). \tag{4.3}$$

Un calcolo microscopico del termine risonante è al di là degli scopi del presente lavoro, tuttavia è possibile esprimere S_{fi}^{ris} in modo fenomenologico come sovrapposizione di linee "lorentziane"

$$S_{fi}^{\text{ris}}(E, \theta=0) = \tag{4.4}$$
$$= r_0 \frac{NZ}{A} \sum_{n, L} \left\{ D_{n, L}\, E^2 \frac{(E_{n, L}^2 - E^2) + i\Gamma_{n, L}\, E}{(E_{n. L}^2 - E^2)^2 + \Gamma_{n, L}^2\, E^2} + D_{n, L}\, \delta_{L, 1} \right\}$$

e fissando i parametri mediante interpolazione della sezione d'urto di assorbimento.

Nel caso del ^{208}Pb lo scopo si ottiene includendo nell'analisi

a) la risonanza dipolare gigante,

b) una risonanza dipolare "fenomenologica" molto allargata nella regione del quasi-deutone,

c) le risonanze quadrupolari isoscalare e isovettoriale il cui ruolo

Tabella IV

	$E_{n,L}$ (MeV)	$\Gamma_{n,L}$ (MeV)	$D_{n,L}$
$J^\pi_T = 1^-_1$	13.4	3.5	1.25
	60.	100.	0.75
$J^\pi_T = 2^+_0$	10.6	2.5	0.05
$J^\pi_T = 2^+_1$	24.0	4.0	0.09

Parametri utilizzati nell'espressione fenomenologica dell'ampiezza di diffusione risonante.

appare essenziale per una corretta descrizione delle sezioni d'urto Compton.

Le energie delle risonanze $E_{n,L}$, le loro larghezze $\Gamma_{n,L}$ e la loro "forza" $D_{n,L}$ sono riportate in tabella IV. Per meglio illustrare il significato di quest'ultimo parametro osserviamo che tramite il teorema ottico e la (4.4) si ottiene facilmente

$$\int_0^\infty \sigma_a(E)dE = 2\pi^2 \hbar c\, r_0 \frac{NZ}{A} \sum_{n,L} D_{n,L} = \sigma^{TRK} \sum_{n,L} D_{n,L} = \\ = \sigma_0{}^{TRK}(1+k) \tag{4.5}$$

dove $\sigma_0{}^{TRK} = (NZ/A)$ 60 MeV · mb corrisponde alla regola di somma di Thomas-Reiche-Kuhn[5].

Si vede pertanto che l'eccesso della quantità $\sum_{n,L} D_{n,L}$ rispetto all'unità (e cioè il fattore di accrescimento k) è direttamente legato al contributo delle forze di scambio al processo di assorbimento.

E' importante osservare che l'ampiezza di diffusione (4.4), pur essendo fenomenologica, è tuttavia analitica regolare nel semipiano inferiore dell'energia, come richiesto dalla causalità, e inoltre la sua parte immaginaria è dispari, come richiesto dalla cosiddetta simmetria di "crossing".

Si noti altresì che il suo limite per $E \to 0$ non è nullo, ma ha la tipica struttura dipolare che si otterrebbe da un calcolo microscopico.

Consideriamo ora i termini di gauge:

$$S_{fi}^{\text{gauge}}(E,\theta)=\epsilon_\mu \epsilon'_\nu (S^{\mu\nu}_{\text{kin}}+S^{\mu\nu}_{\text{exch}})= \\ =-\vec{\epsilon}\cdot\vec{\epsilon}\,' r_0 Z[F_{el}(q)+F_{\text{exch}}(q)]. \tag{4.6}$$

Assumendo una distribuzione di Fermi per la densità di protoni nel nucleo,

$$\rho(r)=\frac{\rho_0}{1+\exp\{(r-R)/c\}}, \tag{4.7}$$

il fattore di forma elastico è (quasi esattamente)

$$F_{el}(q)= \\ =\rho_0 \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{\pi c q}{\text{senh}(\pi c q)} \cdot \frac{3}{qR} \left\{ \frac{\text{sen}(qR)}{(qR)^2} \cdot \frac{\pi c q}{\tanh(\pi c q)} - \frac{\cos(qR)}{qR} \right\} \tag{4.8}$$

dove

$$\rho_0=\frac{1}{4\pi R^3/3} \frac{1}{\{1+(\pi c/R)^2\}} \tag{4.8'}$$

se si richiede

$$\lim_{q\to 0} F_{el}(q)=1. \tag{4.9}$$

La distribuzione di carica (4.7) è in grado di riprodurre adeguatamente la diffusione elastica di elettroni dal ^{208}Pb[(6)] fino a impulsi trasferiti assai maggiori di quelli che intervengono (almeno per il momento) nella diffusione Compton di fotoni. Possiamo pertanto ritenere che la (4.8) descriva accuratamente il contributo cinetico ai termini di gauge.

Per il termine di scambio consideriamo innanzitutto l'identità

$$\sum_{i,j=1}^{A} \{t_z(i)-t_z(j)\}^2 = 2 \sum_{i,j=1}^{A} \left\{\frac{1}{2}+t_z(i)\right\} \left\{\frac{1}{2}-t_z(j)\right\} \tag{4.10}$$

che implica, tra l'altro, l'annullarsi dell'elemento di matrice di scambio nella (3.14) ($|0\rangle$ è lo stato fondamentale antisimmetrizzato).

Una corretta valutazione di $S_{\mu\nu}^{\text{exch}}$ richiederebbe una appropriata funzione d'onda per lo stato fondamentale del ^{208}Pb, correlata da

un'interazione nucleone-nucleone realistica. Per semplicità utilizziamo qui lo stato fondamentale della materia nucleare infinita e un potenziale a due corpi schematico[7]:

$$V(1,2)=\vartheta(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)\,[(1-\alpha)+\alpha P_{12}] \qquad (4.11)$$

con

$$\vartheta(r)=\begin{cases} U_0, & \alpha=0 \quad \text{per} \quad 0\leqslant r<a \\ -V_0, & \alpha=1/2 \quad \text{per} \quad a\leqslant r<b \\ 0 & \quad\quad\quad \text{per} \quad r\geqslant b \end{cases}$$

Volendo tuttavia includere, almeno parzialmente, gli effetti delle dimensioni finite del sistema, si useranno due distribuzioni di Fermi, equaz. (4.7), per le densità di protoni e neutroni che intervengono nella (3.14) (come appare evidente dalla (4.10)).

Scriveremo pertanto il contributo di scambio al termine di gauge della matrice di diffusione come:

$$S_{\mu\nu}^{\text{exch}}=-\delta_{\mu\nu}r_0\,\frac{Mc^2}{3(\hbar c)^2}\iint d\vec{r}_1\,d\vec{r}_2\,e^{-i\frac{\vec{q}}{2}\cdot(\vec{r}_1+\vec{r}_2)}\,r_{12}^2\,\rho_p(\vec{r}_1)\,\rho_n(\vec{r}_2)\,F(r_{12})\,V_M(r_{12}) \qquad (4.12)$$

dove $r_{12}=|\vec{r}_1-\vec{r}_2|$ e la funzione $F(r_{12})$ rappresenta le correlazioni nella funzione d'onda di due particelle, che qui ci limitiamo a considerare come derivanti unicamente dal principio di Pauli:

$$F(r)=\left[\frac{3}{k_F\,r}\,j_1(k_F\,r)\right]^2, \qquad (4.13)$$

essendo k_F l'impulso di Fermi e j_1 la funzione sferica di Bessel di ordine uno.

Con un cambiamento di variabili, $\vec{R}=(\vec{r}_1+\vec{r}_2)/2$, $\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$, l'integrale sestuplo dell'equazione (4.12) si può ricondurre a un integrale triplo e il termine di gauge di scambio risulta, per il potenziale (4.11),

$$S_{\mu\nu}^{\text{exch}}=-\delta_{\mu\nu}r_0\,\frac{Mc^2}{(\hbar c)^2}\,ZN\rho_0^p\rho_0^n\,\frac{2}{3}\,V_0\,\frac{(2\pi)^2}{q}\int_0^\infty dR\,R\,\text{sen}(qR)$$

$$\int_a^b dr\, r^4 F(r) \int_{-1}^{+1} dx \frac{1}{1+e^{\frac{\sqrt{R^2+r^2/4+Rrx}-\mathcal{R}_p}{c_p}}} \cdot \tag{4.14}$$
$$\cdot \frac{1}{1+e^{\frac{\sqrt{R^2+r^2/4-Rrx}-\mathcal{R}_n}{c_n}}}$$

dove $\mathcal{R}_p$, c_p, $\mathcal{R}_n$, c_n sono, rispettivamente, il raggio e lo spessore superficiale delle distribuzioni dei protoni e dei neutroni.

Per concludere questa sezione consideriamo l'andamento dell'ampiezza di diffusione (4.3) nel limite $E \to 0$ (e quindi $q \equiv 2E \operatorname{sen}(\theta/2)/\hbar c \to 0$); dalle espressioni (4.4) e (4.6) si ottiene immediatamente

$$\lim_{E \to 0} S_{fi}(E, \theta=0) = r_0 \left\{ \frac{NZ}{A} \sum_n D_{n,1} - ZF_{el}(0) - \right. \left. - ZF_{\text{exch}}(0) \right\}, \tag{4.15}$$

dove appaiono chiaramente i contributi della parte risonante e della parte di gauge.

Ricordando che

$$\sum_n D_{n,1} = 1 + k_{\text{dipolo}} \equiv (\sigma_0^{\text{TRK}})^{-1} \int_0^\infty dE\, \sigma_a^{E1}(E), \tag{4.16}$$

la (4.15) coinciderà con il ben noto limite classico di Thomson

$$Re\, S_{fi}(0,0) = -\frac{(Ze)^2}{AMc^2} = -r_0 \frac{Z^2}{A} \tag{4.17}$$

solo se i contributi delle forze di scambio si cancellano fra di loro, ossia se

$$\lim_{q \to 0} F_{\text{exch}}(q) = \frac{N}{A} k_{\text{dipolo}} \,. \tag{4.18}$$

Questa relazione si può considerare sia come un metodo alternativo per valutare il fattore di accrescimento della regola di somma per l'assorbimento di dipolo elettrico, sia come un test di consistenza tra i termini risonanti (che fissano la $\sum D_{n,1}$) e i termini di gauge dell'ampiezza di diffusione fotone-nucleo.

5. Risultati

La Fig. 2 illustra la sezione d'urto fenomenologica di fotoassorbimento nel ^{208}Pb, valutata con i parametri della tabella IV; il confronto con i risultati sperimentali di Bergère ed al.[8] appare più che soddisfacente. Notiamo come i dati sperimentali impongano la presenza di un contributo risonante per energie superiori alla risonanza dipolare gigante.

Per la sezione d'urto di diffusione elastica, in accordo con il modello presentato nella sezione precedente abbiamo utilizzato la seguente espressione:

$$\frac{d\sigma(E,\theta)}{d\Omega} = |S_{fi}^{E1}(E)|^2 \frac{(1+\cos\theta)}{2} + \tag{5.1}$$

$$+ |S_{fi}^{E2}(E)|^2 \frac{(1-3\cos^2\theta + 4\cos^4\theta)}{2} +$$

$$+ 2\cos^3\theta \, [Re\, S_{fi}^{E1}(E)\, Re\, S_{fi}^{E2}(E) + Im\, S_{fi}^{E1}(E)\, Im\, S_{fi}^{E2}(E)]$$

dove i termini di gauge contribuiscono solo al $Re\, S_{fi}^{E1}(E)$, essendo puramente dipolari, introducendovi però una addizionale dipendenza dall'angolo di diffusione θ (attraverso il modulo dell'impulso trasferito $\vec{q}$), che è essenziale per riprodurre l'andamento diffrattivo delle sezioni d'urto sperimentali.

Per porre in evidenza l'importanza dei termini di gauge, abbiamo confrontato le sezioni d'urto sperimentali misurate da Ziegler e coll.[1], per la diffusione Compton da ^{208}Pb a $\theta = 60°$ e $\theta = 150°$, con i risultati dell'espressione (5.1), sia considerando un termine di gauge puramente cinetico,

$$(Re\, S_{fi}^{E1})^{gauge} = -r_0\, Z F_{el}(q), \tag{5.2}$$

sia includendo il contributo a S_{fi}^{gauge} delle forze di scambio.

Il primo caso è illustrato nelle Figg. 3 e 4, dove la essenzialità di $F_{el}(q)$ per ottenere una corretta interpretazione dei dati sperimentali appare evidente. Ciò è ulteriormente confermato dalla Fig. 5, dove si mostra il rapporto $R = \{d\sigma(150°)/d\Omega\}/\{d\sigma(60°)/d\Omega\}$ in funzione dell'energia del fotone incidente.

Si tenga presente che in questo calcolo i parametri della distribuzione di carica dei protoni sono

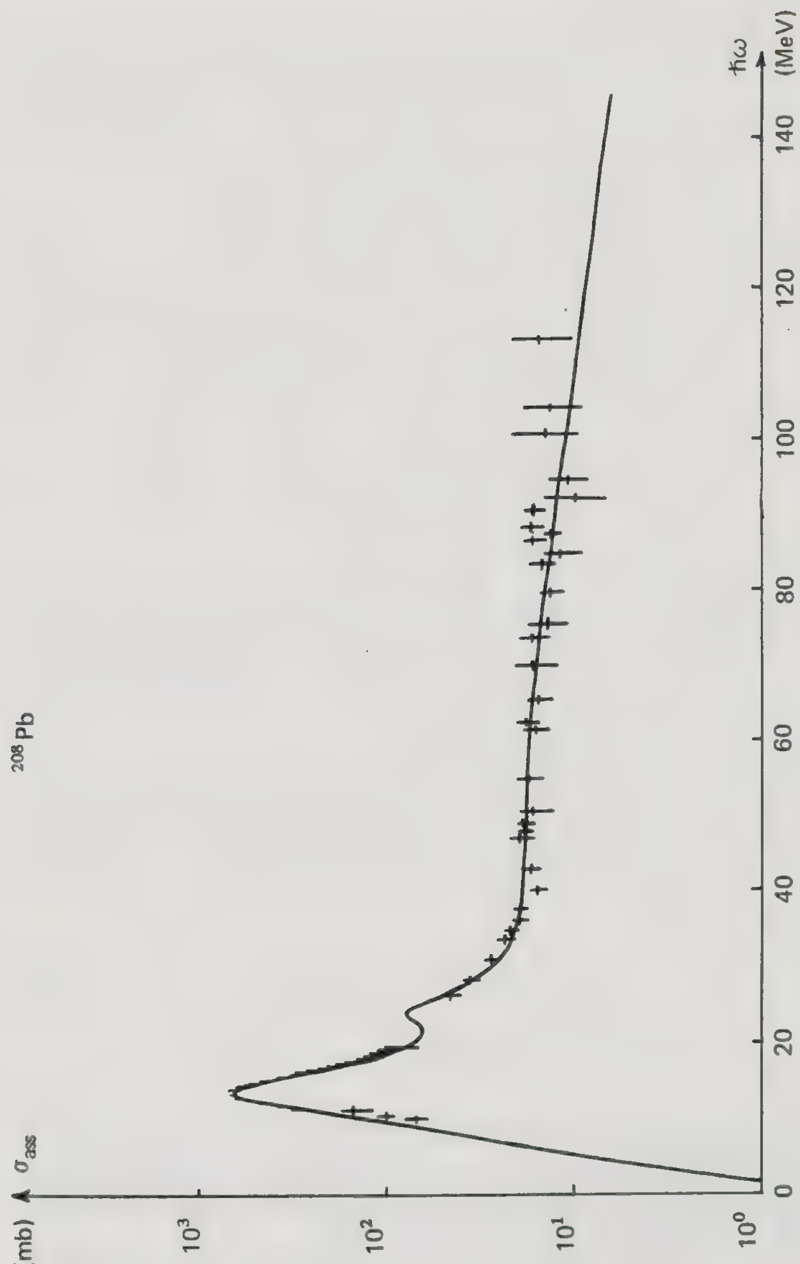


Figura 2 - La sezione d'urto sperimentale di fotoassorbimento nel ^{208}Pb assieme alla predizione del nostro modello.

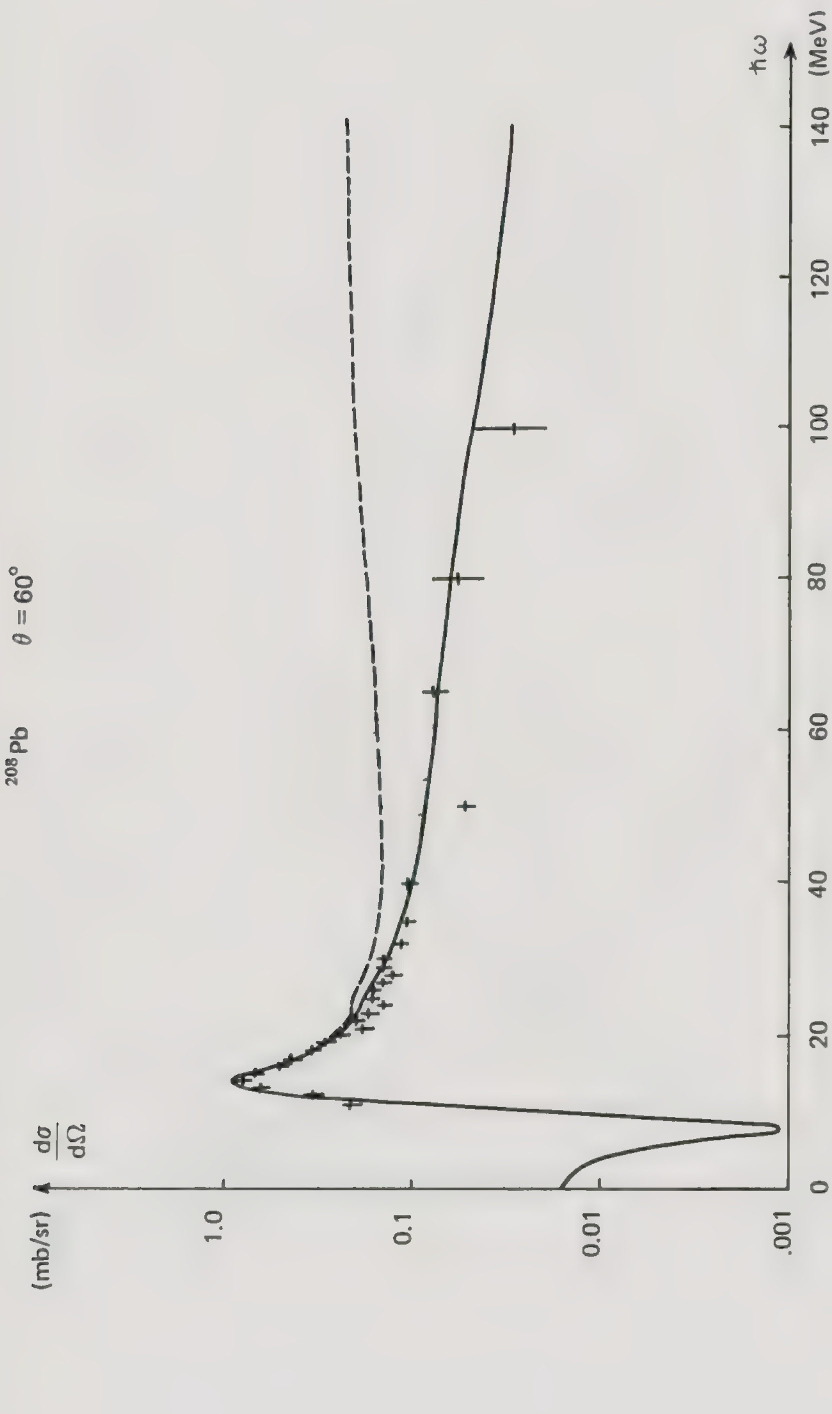


Figura 3 - La sezione d'urto di diffusione Compton sul ^{208}Pb a $\theta = 60°$. La curva continua è calcolata con il termine di gauge puramente cinetico (3.11), mentre nella curva a tratto $F_{el}(q) = 1$.

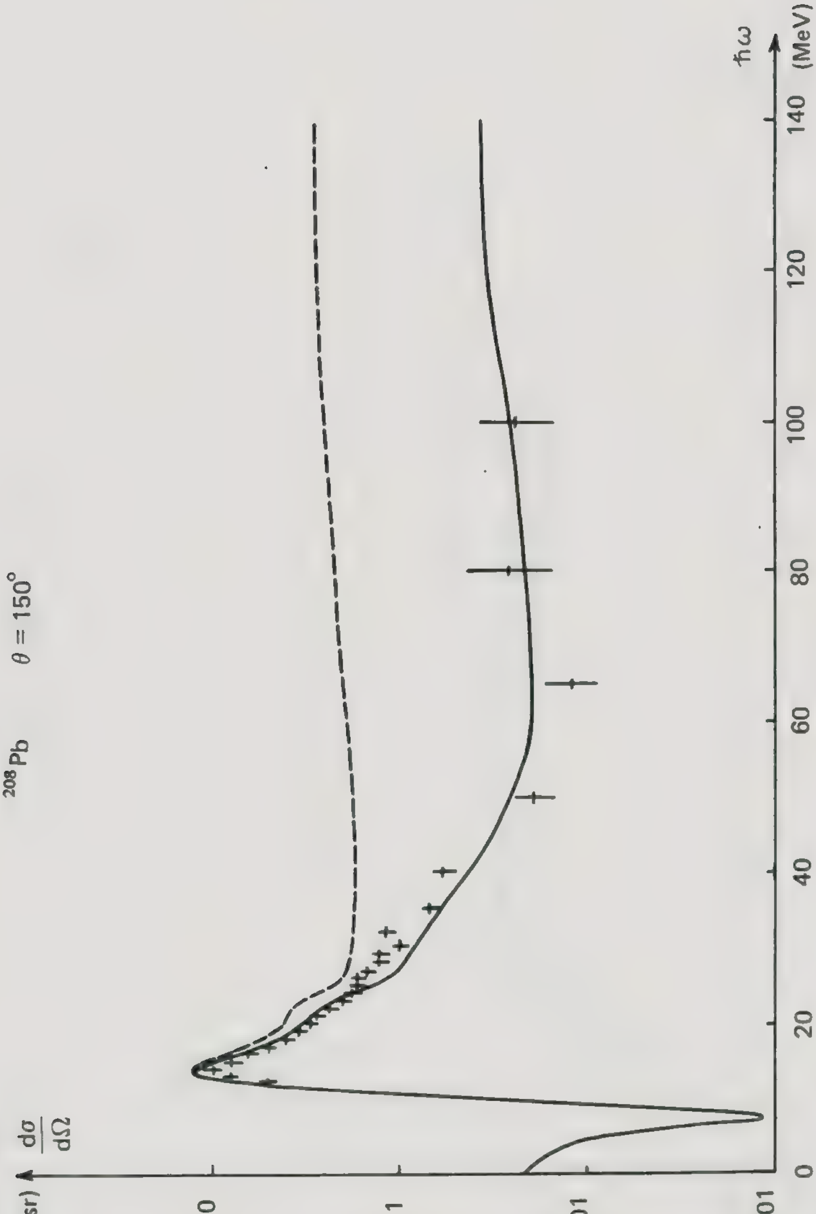


Figura 4 - Lo stesso che in fig. 3 ma a $\theta = 150°$.

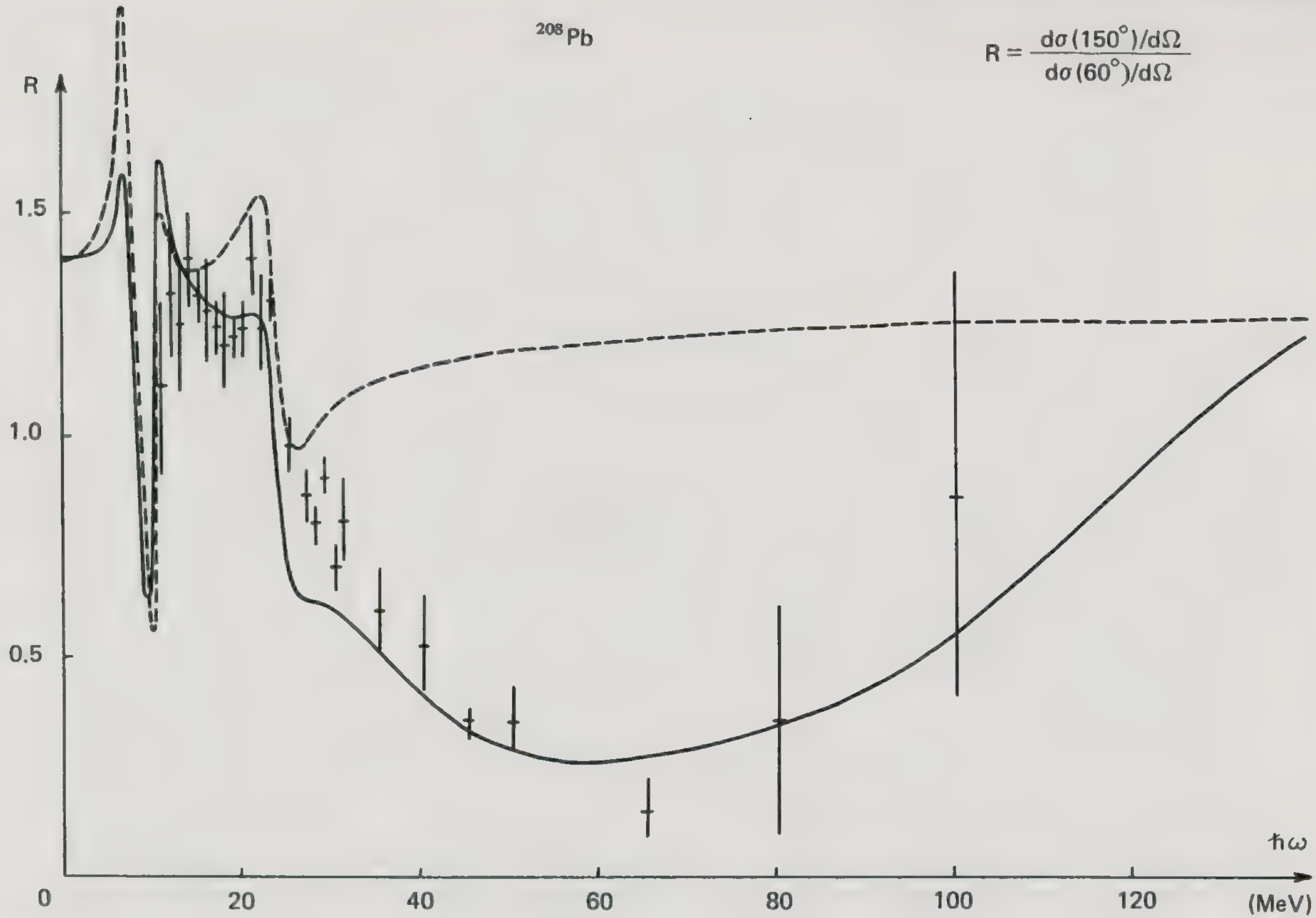


Figura 5 - Rapporto R fra le sezioni d'urto di diffusione misurate a $\theta = 150°$ e $\theta = 60°$. La linea continua e la linea a tratto corrispondono alle stesse situazioni delle figure precedenti. Si noti che nel caso puramente dipolare $R = 1.4$, in quello puramente quadrupolare $R = 2$. Il massimo a 10 MeV è pertanto dovuto alla risonanza $J_T^\pi = 2_0^+$ e il successivo minimo alla interferenza del dipolo risonante con il termine di gauge.

$$\mathcal{R}_p = 6.491 \text{ fm}$$
$$c_p = 0.54 \text{ fm}$$

come indicato dalla diffusione elastica di elettroni.

Più complessa appare l'analisi dei termini di gauge in presenza di forze di scambio. Infatti le Figg. 6 e 7 non permettono di concludere che l'inclusione di $S_{\mu\nu}^{\text{exch}}$ migliori l'accordo con l'esperimento. E' tuttavia da tener presente che, da un lato, la forza da noi usata, pur fornendo una corretta descrizione della materia nucleare infinita con i parametri $V_0 = 53.24$ MeV, $a = 0{,}57$ fm, $b = 2.08$ fm, rappresenta un rozza schematizzazione della complessa interazione nucleone-nucleone, dall'altro, la funzione $F(r)$ (equaz. (4.13)) ignora le correlazioni dinamiche, tenendo conto unicamente di quelle imposte dal principio di Pauli.

La situazione è altresì complicata dall'incertezza tuttora irrisolta, sui parametri che caratterizzano la distribuzione di densità neutronica per la quale si è usato $c_n = c_p$ e un raggio dei neutroni variabile da $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_p$ a $\mathcal{R}_n = 8$ fm. I risultati sono piuttosto sensibili alla scelta di $\mathcal{R}_n$: forse un valore di circa 7.4 fm sembra il più adeguato.

Il rapporto delle sezioni d'urto illustrato in Fig. 8 contiene tuttavia elementi indicanti un contributo sostanziale di $S_{\mu\nu}^{\text{exch}}$.

Per quanto riguarda la consistenza tra il termine risonante e quello di gauge quando $E \to 0$, si è osservato che il valore di k_{dipolo} fornito dalla (4.18) dipende in maniera critica dal raggio della distribuzione neutronica, variando da $k_{\text{dipolo}} \cong 1.7$ per $\mathcal{R}_n = 6.49$ fm, a $k_{\text{dipolo}} = 1$ per $\mathcal{R}_n = 8$ fm. Riteniamo perciò che, entro i limiti del modello, questi risultati avvalorino la consistenza della teoria.

6. Metodo rigoroso per un calcolo microscopico dei termini di gauge

I termini di contatto $S_{\mu\nu}$ dell'ampiezza di diffusione e, in particolare, i contributi delle correnti di scambio mesoniche (CSM) si possono derivare da uno sviluppo della Hamiltoniana d'interazione elettromagnetica che includa termini fino al second'ordine nel potenziale elettromagnetico[9]

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\int d\vec{x}\, j^\mu(x) A_\mu(x) + \frac{1}{2}\int d\vec{x}\, d\vec{y}\, A_\mu(x) B^{\mu\nu}(x, y) A_\nu(y) \quad (6.1)$$

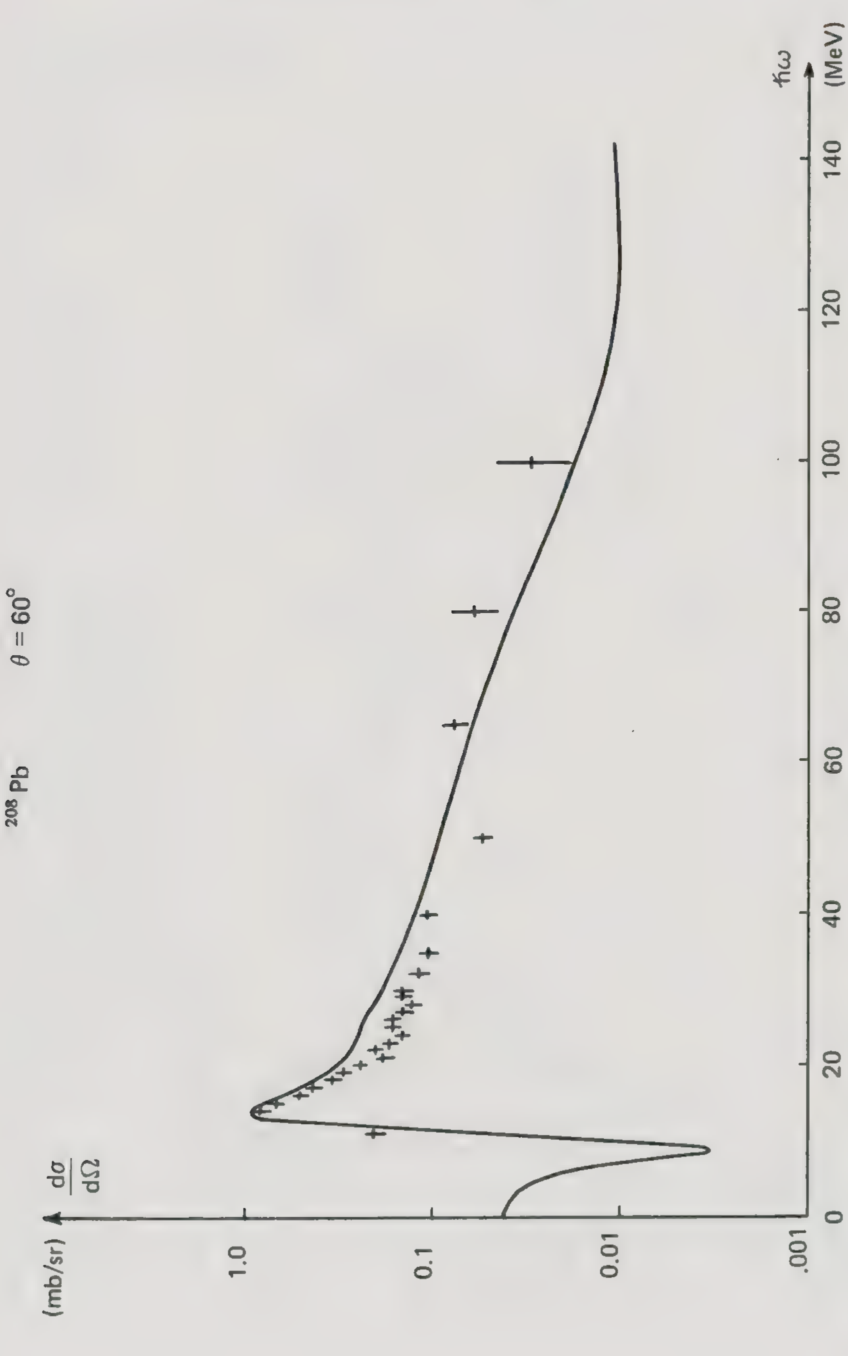


Figura 6 - Lo stesso che in fig. 3, ma includendo $S_{\mu\nu}^{\text{exch}}$ con $\mathscr{R}_n = 7.4$ fm.

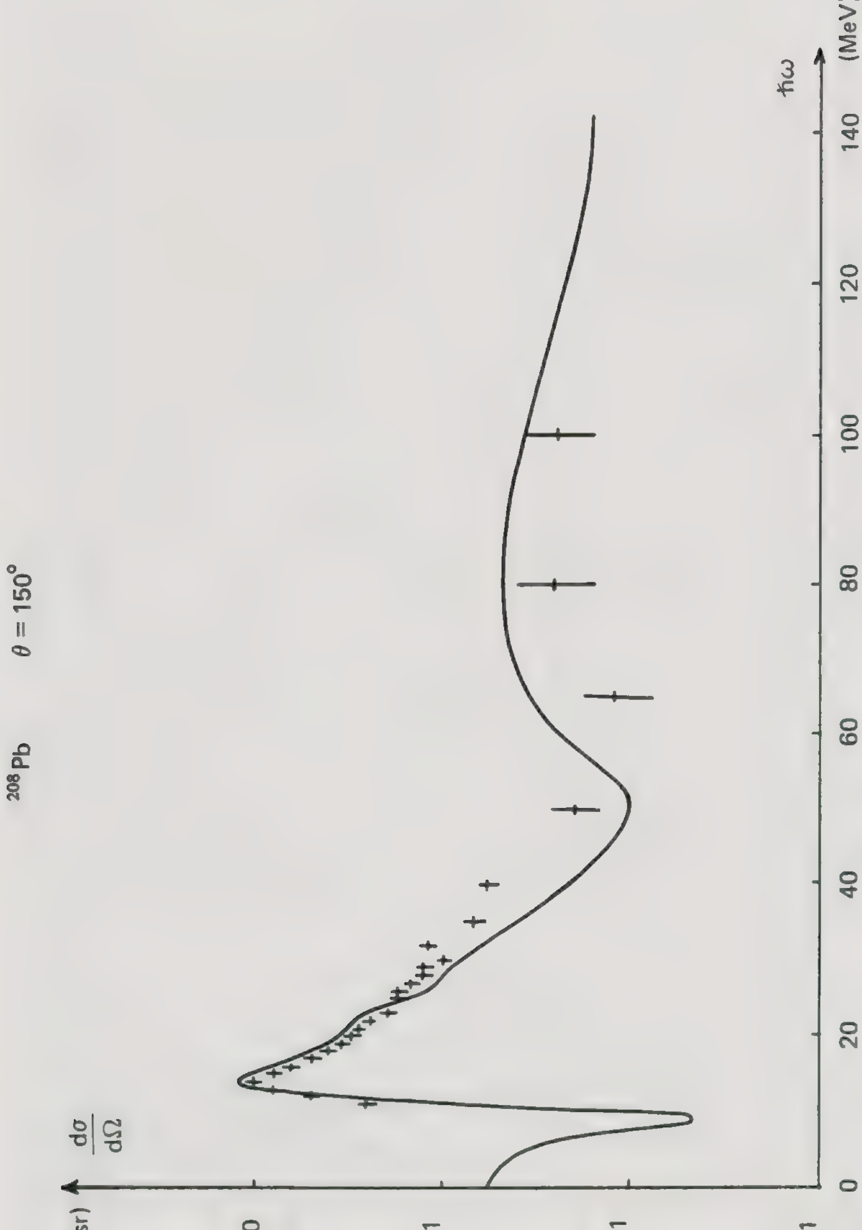


Figura 7 - Lo stesso che in fig. 4, ma includendo $S_{\mu\nu}^{\text{exch}}$ con $\mathscr{R}_n = 7.4$ fm.

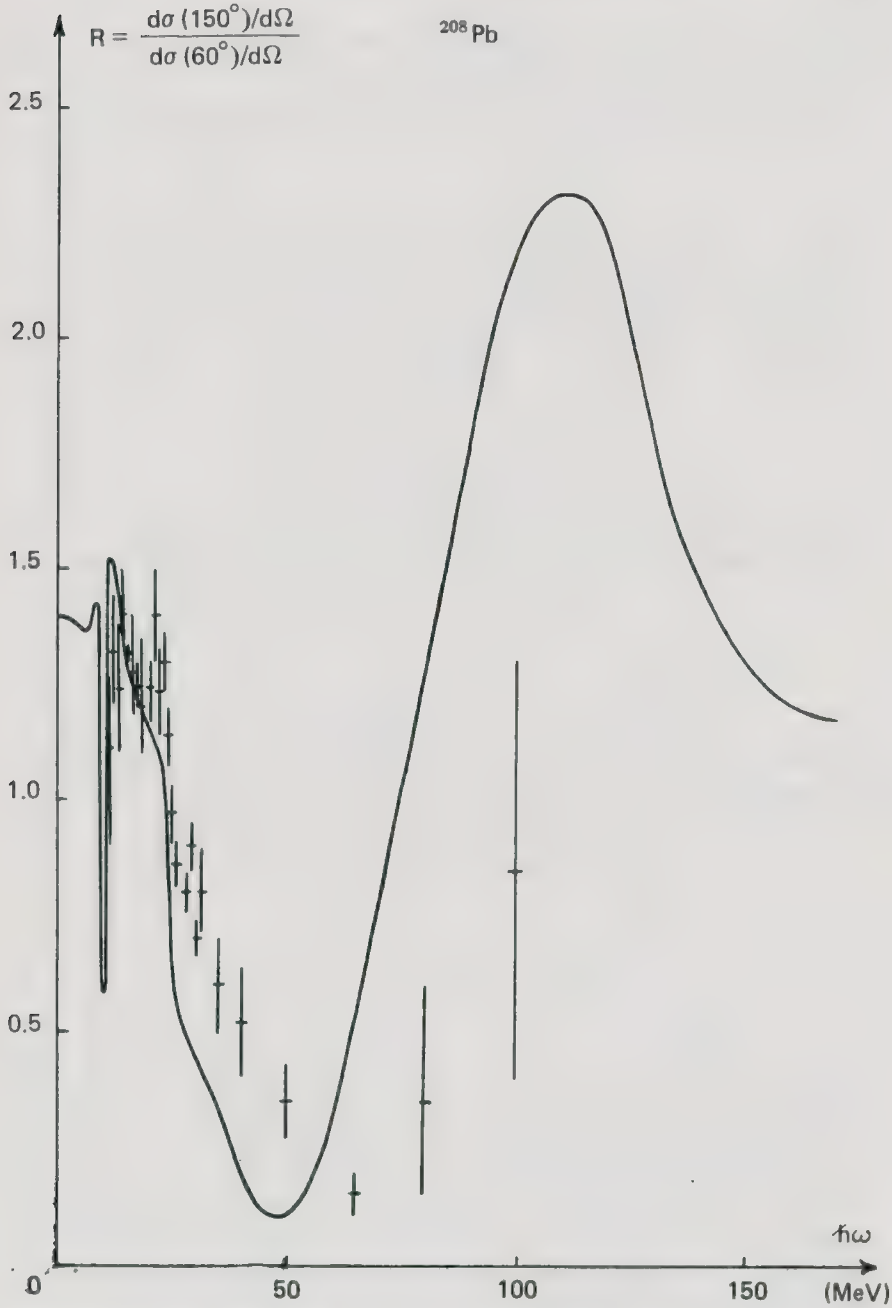


Figura 8 - Lo stesso che in fig. 5, ma includendo $S_{\mu\nu}^{exch}$ con $\mathscr{R}_{n} = 7.4$ fm.

dove l'operatore $B^{\mu\nu}$ descrive i contributi del prim'ordine a vertici con due fotoni, tra cui i termini di contatto.

Se si esegue la sostituzione di "minima relatività" nell'Hamiltoniana nucleare non relativistica,

$$\vec{P}_j \to \vec{P}_j - \frac{e}{c}\,[{}^1\!/_2 + t_z(j)]\,\vec{A}(r_j); \quad \hat{H} \to \hat{H}(A_\mu), \tag{6.2}$$

la densità di corrente nucleare j_μ e l'operatore $B_{\mu\nu}$ sono esprimibili come derivate funzionali di $\hat{H}(A_\mu)$:

$$j_\mu(x) = -\left.\frac{\delta \hat{H}(A_\mu)}{\delta A_\mu(x)}\right|_{A_\mu \equiv 0} \tag{6.3a}$$

$$B^{\nu\mu}(x, y) = B^{\mu\nu}(x, y) = \left.\frac{\delta^2 \hat{H}(A_\mu)}{\delta A_\mu(x)\,\delta A_\nu(y)}\right|_{A_\mu \equiv 0} . \tag{6.3b}$$

La proprietà di invarianza di gauge della matrice di diffusione

$$S_{fi} = -\frac{2\pi}{V\hbar\sqrt{\omega\omega'}}\,\epsilon_\mu\,\epsilon'_\nu \int d^4x\, d^4y\, e^{-ik\cdot x}\, e^{ik'\cdot y} \cdot \\ \cdot \{\langle f|\, T\{j^\mu(x) j^\nu(y)\}\,|i\rangle - i\langle f|\, B^{\mu\nu}(x, y)\,|i\rangle\} \tag{6.4}$$

impone la seguente relazione tra l'operatore $B^{\mu\nu}$ e l'operatore densità di corrente j^μ:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} B^{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{i}{\hbar c}\,[\rho(\vec{x}),\ j^\nu(\vec{y})]. \tag{6.5}$$

Essa implica $B^{\nu 0} = B^{0\nu} = 0$ e inoltre

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\,\frac{\partial}{\partial x_l}\,B^{kl}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{(\hbar c)^2}\,[\rho(\vec{x}), [\hat{H}, \rho(\vec{y})]] \tag{6.6}$$

in analogia con la condizione (3.9), precedentemente usata per definire $S_{\mu\nu}$.

All'operatore $B_{\mu\nu}$ contribuisce sia l'energia cinetica ($B_{\mu\nu}^{\mathrm{kin}}$) sia l'energia potenziale ($B_{\mu\nu}^{\mathrm{CSM}}$), espressa attraverso un'interazione nucleone-nucleone mediata dallo scambio di mesoni, purché quest'ultima contenga esplicitamente gli impulsi e le variabili di spin isotopico dei nucleoni e dei mesoni.

Il termine cinetico è dato da

$$B_{kl}^{\mathrm{kin}}(\vec{x},\vec{y})=\left.\frac{\delta^2\,\hat{T}(\vec{A})}{\delta A_k(\vec{x})\,\delta A_l(\vec{y})}\right|_{\vec{A}\equiv 0} \qquad (6.7)$$

ossia, esplicitamente,

$$B_{kl}^{\mathrm{kin}}(\vec{x},\vec{y})=$$
$$=\frac{\delta_{kl}}{Mc^2}\sum_{i=1}^{A} e^2\left\{\frac{1}{2}+t_z(i)\right\}^2 f_E(|\vec{x}-\vec{r}_i|)\,f_E(|\vec{y}-\vec{r}_i|) \qquad (6.8)$$

e i suoi elementi di matrice fra gli stati iniziale e finale del nucleo riconducono essenzialmente alla (3.11).

Il contributo di scambio mesonico a $B_{\mu\nu}$ per il potenziale V_{OPE}, definito formalmente da

$$B_{kl}^{\mathrm{CSM}}(\vec{x},\vec{y})=\left.\frac{\delta^2\,\hat{V}_{\mathrm{OPE}}(\vec{A})}{\delta A_k(\vec{x})\,\delta A_l(\vec{y})}\right|_{\vec{A}\equiv 0} \qquad (6.9)$$

è stato elaborato da Arenhövel [9] e si può scindere in quattro termini corrispondenti ai diagrammi della Fig. 9.

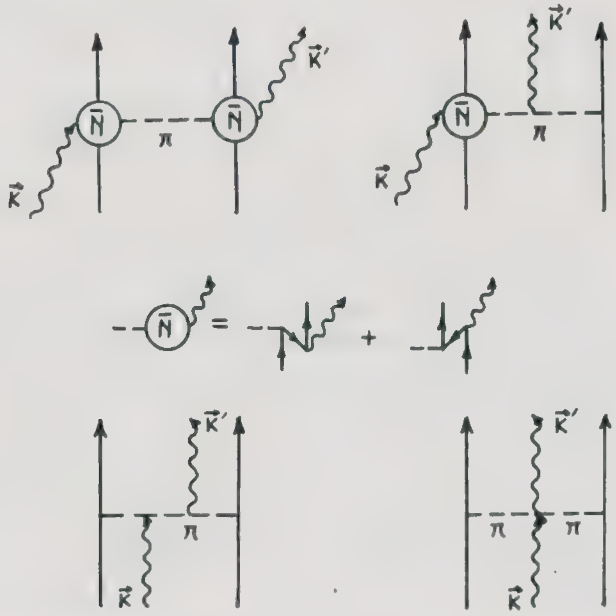


Figura 9 - Diagrammi di Feynman dei vertici a due fotoni, interagenti con le correnti di scambio (di un pione) che contribuiscono all'ampiezza di diffusione.

Con questo metodo di valutare i termini di gauge si evitano le limitazioni inerenti ai teoremi di bassa energia e si ha inoltre la possibilità di utilizzare un'interazione nucleone-nucleone realistica, quale quella mediata dallo scambio di bosoni.

Infine il limite dell'ampiezza di diffusione in avanti per grandi energie del fotone incidente corrisponde alla diffusione Thomson del fotone da parte dei pioni carichi presenti nella materia nucleare e fornisce pertanto dirette informazioni sulla distribuzione di pioni nel nucleo.

BIBLIOGRAFIA

(1) R. Leicht, M. Hammen, K. P. Schelhaas e B. Ziegler, *preprint* (1980).

(2) A. Hofmann, *Phys. Report* **64** (1980), 249.

(3) P. Christillin e M. Rosa-Clot, *Il Nuovo cimento* **28** A (1975) p. 29; *Il Nuovo Cimento* **43** A (1978), 172.

(4) A. Molinari, *Phys. Report* **64** (1980), 283

(5) W. Kuhn, *Z. Phys.*, **33** (1925), 408; W. Reiche, W. Thomas, *Z. Phys.* **34** (1925), 510.

(6) Heisenberg ed al., *Phys. Rev. Lett.* **23** (1969), 1042.

(7) W.M. Alberico, M. Bregola, R. Cenni, A. Molinari. *Il Nuovo Cimento* **58** A (1980), 31.

(8) A. Veyssiére ed al., *Nucl. Phys.* A **159** (1970), 561.
A. Leprêtre ed al., *Phys. Lett.* **79** B (1978) 43.

(9) H. Arenhövel, *Z. Phys. A – Atoms and nuclei* **292** (1980), 129.

La teoria delle transizioni di fase all'inizio degli anni '80

Mario Rasetti *

Al prof. Mario Verde, con stima e gratitudine.

Le transizioni di fase sono in certa misura fenomeni molto semplici e intuitivi, che si possono ascrivere al mostrarsi su scala macroscopica di effetti di instabilità nella dinamica microscopica, i quali si propagano catastroficamente per processo collettivo all'intero sistema.

Ciò nonostante la costruzione di una teoria delle transizioni di fase è ancora ben lontana dall'essere un fatto compiuto, e si presenta anzi come uno dei problemi più formidabili della fisica teorica e matematica dei giorni nostri. Questa contraddizione fra la apparente semplicità del fenomeno e la difficoltà di formularne le complesse leggi che di fatto lo controllano si avverte anche attraverso un sia pur rapidissimo sguardo alla storia recente della fisica delle transizioni di fase.

Fin dagli inizi della fisica molecolare infatti, i grandi maestri (Van der Waals, Ornstein, Zernike, Weiss) afferrarono molti dei meccanismi essenziali dei processi critici. Le semplici teorie che essi formularono sono di fatto ancora molto spesso un punto di partenza e un riferimento per gli sviluppi più moderni. Fu ben presto evidente tuttavia, dal cumulo di importante lavoro dei loro successori (Kac, Uhlenbech, Hemmer, Onsager, Lebowitz, Penrose, Lieb) che non ci si poteva aspettare che tali teorie – per lo più fenomenologiche – fossero in grado di descrivere tutti gli aspetti delle transizioni di fase e dei fenomeni critici.

Ne seguì un periodo di relativo stallo ed è soltanto dall'inizio degli anni sessanta che nuovi fatti sono cominciati ad accumularsi in questo campo della fisica, ad un ritmo sempre più intenso, aggiungen-

* Dipartimento di Fisica del Politecnico di Torino.

do via via nuove informazioni e stimolando un crescente interesse. I fatti cui faccio riferimento sono essenzialmente di due tipi. Dal lato teorico la soluzione rigorosa di *modelli*, ottenuta sia con tecniche analitiche spesso originali di grande sofisticatezza, sia per via numerica grazie all'enorme sviluppo di calcolatori elettronici di sempre maggiore portata e velocità, e l'apparire dei primi tentativi di vere e proprie teorie. Dal lato sperimentale gli sviluppi raffinati delle tecniche di misura e controllo, specie nel campo delle basse temperature. E' forse interessante precisare concisamente entrambi questi punti.

E' estremamente difficile ottenere conclusioni matematicamente rigorose circa il comportamento statistico di sistemi a molti corpi interagenti, anche quando questi si trovano in una ben definita fase di equilibrio. Ancora maggiori sono ovviamente le difficoltà quando si vuole studiare che cosa accade alla transizione fra una fase e un'altra; situazione che corrisponde — in termini matematici — al rompersi dell'analicità delle funzioni termodinamiche e all'apparire in queste di singolarità. Una teoria delle transizioni di fase si propone proprio di esplorare queste singolarità rivelandone qualche forma di struttura interna, e di studiare tale struttura sia nelle sue caratteristiche formali, classificandole, sia nei suoi legami con la dinamica microscopica che fa muovere il sistema. Il prezzo inevitabile del rigore nella soluzione di un modello è assai spesso la perdita di generalità: la restrizione del numero di dimensioni, l'imposizione di qualche limite asintotico, l'adozione di una forma specifica per il potenziale intermolecolare e così via.

D'altra parte per definizione un modello è un sistema artificiale, e i requisiti che gli si richiedono sono sostanzialmente due: i) la semplicità, che si identifica con la risolvibilità in termini matematici; ii) il fatto che semplicità non implichi banalità.

L'idea è di non aspettarsi di confrontare direttamente i risultati dell'esperimento con quelli del calcolo su un modello, ma che questi ultimi possano dare indicazioni sulle possibili risposte a quesiti molto importanti, ad esempio su quali siano le caratteristiche rilevanti di un certo fenomeno e quali quelle non importanti, quali parametri determinino la struttura globale di una teoria e la sua consistenza interna e quali invece possano essere modificati o trascurati senza alterare la generalità dell'informazione.

Le soluzioni esatte di modelli, in altre parole, costituiscono una

specie di riferimento *puro*, cioè esente da interferenze con fenomeni esterni (come invece accade non solo per i dati sperimentali, ma anche per gli esperimenti numerici), al quale confrontare teorie più generali, ma necessariamente approssimate.

Per quanto riguarda l'accumulo di nuovi dati sperimentali, basti ricordare che la descrizione dei fenomeni critici forse più interessante, per l'informazione che fornisce al teorico, è quella in termini di indici critici. Questa descrive il comportamento di una classe di grandezze caratteristiche (calore specifico, polarizzazione magnetica, suscettività, lunghezza di correlazione, fattore di struttura, ecc.) in prossimità della transizione di fase o del punto critico, mediante una legge di potenza del parametro

$$\vartheta = \frac{T - T_c}{T_c} \tag{1}$$

dove T è la temperatura assoluta e T_c quella critica.

E' ormai assodato che tale descrizione è applicabile con buona approssimazione solo molto vicino alla criticità, vale a dire per $\vartheta \lesssim 10^{-2}$. Questo implica la determinazione e quindi il controllo della temperatura con una precisione che – tipicamente, negli esperimenti più moderni – è dell'ordine di una parte su 10^4 di T_c. Inoltre, ancora per esemplificare come solo gli sviluppi tecnici e tecnologici più recenti abbiano ridato impulso a questo tipo di fisica, proprio perché in prossimità della transizione certe grandezze come il calore specifico tendono a divergere, l'equilibratura del sistema richiede tempi assai lunghi, durante i quali ogni grandezza deve essere controllata con grande cura (ad es., poiché anche la compressibilità diverge, la gravità induce gradienti di densità che non possono essere ignorati).

Ritornando alla teoria, cominciamo con una breve rassegna proprio dei modelli che sono stati risolti esattamente, e dalla soluzione – o talora dai tentativi di soluzione – esatta dei quali abbiamo imparato nuove caratteristiche generali che una teoria auto-consistente deve presentare.

Ricordiamo innanzi tutto che soluzione esatta significa – assegnato il modello mediante la struttura geometrica topologica dello spazio in cui il sistema si localizza e assume le sue configurazioni possibili, nonché mediante l'operatore hamiltoniana H che ne defini-

sce l'energia totale – significa, dicevo, calcolare la quantità caratteristica (energia libera)

$$F=-\frac{1}{\beta}\ln Tr\{e^{-\beta H}\} \qquad (2)$$

dove $\beta=\frac{1}{K_B T}$, essendo K_B la costante di Boltzmann e T la temperatura assoluta, e Tr sta in generale per la somma su tutte le possibili configurazioni degli N gradi di libertà che caratterizzano il sistema stesso. Lo studio della transizione di fase si riduce allo studio dell'analicità nel parametro β, e negli altri parametri che eventualmente caratterizzino l'hamiltoniana H, della funzione

$$f=\lim_{\substack{N\to\infty\\ V\to\infty\\ \frac{N}{V}=\text{cost.}}}\frac{1}{N}F \qquad (3)$$

V è il volume nel quale il sistema è confinato. L'operazione di limite specificata nella (3) viene detta *limite termodinamico*.

Il modello più studiato e dalla storia più affascinante è il modello di Ising. Suggerito nel 1922 da Lenz e Heisenberg come modello semplice delle proprietà ferromagnetiche della materia, questo fu risolto nel 1925 da Ising(1) nella sua tesi di dottorato per sistemi a una dimensione, e nel 1944 da Onsager(2) per due dimensioni. Quest'ultimo lavoro fu una pietra miliare di importanza a tutt'oggi forse non superata nella storia della meccanica statistica. La dimensionalità cui faccio riferimento è quella del reticolo (una catena lineare nel primo caso) gli N siti del quale sono sede di variabili dinamiche tipo *spin*, σ_i, $i=1,\dots,N$, che possono assumere i valori ± 1. L'energia del sistema ha la forma

$$H=-\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} J_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j - B\sum_{i=1}^{N}\sigma_i \qquad (4)$$

Il parametro B rappresenta l'interazione degli spin con un campo magnetico esterno. Le soluzioni esatte cui ho fatto cenno sono state ottenute con una interazione del tipo

$$J_{ij}=\begin{cases} J & \text{se i siti } i \text{ e } j \text{ sono primi vicini sul reticolo}\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases} \qquad (4')$$

Il caso a due dimensioni inoltre è stato risolto soltanto per $B=0$.

Non esistono a tutt'oggi soluzioni non perturbative del modello di Ising in 2 dimensioni con $B\neq 0$ o dello stesso modello sia pure senza campo esterno in 3 dimensioni (si sa tuttavia che in modo non ovvio questi due problemi sono affini[(3)]).

E' utile ricordare che il modello di Ising fornisce, nelle teorie dette di *gas-reticolare* (Lee e Yang[(4)]), anche una descrizione delle proprietà critiche di fluidi e superfluidi[(5)].

Un'altra classe di modelli che si è rivelata di estremo interesse è quella dei modelli a *vertici*. Classico fra questi è quello a 8 vertici risolto da Baxter negli anni 70 (ma Baxter ha annunciato proprio alla fine del 1980 la soluzione esatta del modello a 12 vertici[(7)]).

Questo si può descrivere assegnando un sistema di spin di Ising su un reticolo bidimensionale quadrato con una hamiltoniana della forma

$$H=-J \sum_{\substack{(i,j)= \\ \text{secondi} \\ \text{vicini}}} \sigma_i \sigma_j - Q \sum_{\substack{(i,j,k,l)= \\ \text{vertici} \\ \text{plaquettes}}} \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l \qquad (5)$$

Quest'ultima differisce da quella di Ising sia perché il termine bilineare accoppia non primi ma secondi vicini sul reticolo, sia per il fatto che esiste un termine quartico che conferisce un'energia di accoppiamento alle quadruple di spin che stanno sui vertici di una maglia elementare quadrata del reticolo. L'origine del nome del modello sta nel fatto che la problematica combinatoria connessa alla sua soluzione è la stessa di un modello nel quale i legami reticolari siano orientati – col solo vincolo che il numero di frecce entranti in ogni sito sia pari – e si attribuisca una energia caratteristica ad ognuna delle 8 configurazioni così possibili ad ogni vertice (vedi fig. 1).

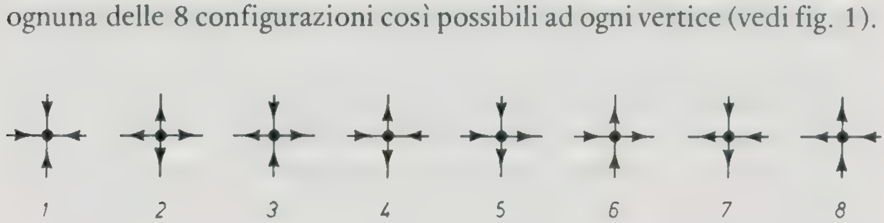


Figura 1

Di estremo interesse, specie per l'utilizzo che se ne è avuto in settori della fisica tradizionalmente estranei alla meccanica statistica — vale a dire nell'applicazione a teorie di gauge reticolari (si vedano gli interventi di F. Gliozzi, S. Sciuto e C. Rebbi su questo stesso volume) — sono i cosiddetti modelli di Potts. In questi la variabile dinamica su ogni sito reticolare può assumere q valori distinti ("colori") ma l'interazione è *daltonica*, vale a dire è sensibile solo al fatto che i colori siano o meno uguali.

L'Hamiltoniana ha la forma

$$H=-J \sum_{\langle i,j\rangle} \delta_{\sigma_i,\sigma_j} - B \sum_{i=1}^{N} \delta_{\sigma_i,\sigma_g} \tag{6}$$

dove la delta di Kronecker è usata col consueto significato, il simbolo $\sum_{\langle i,j\rangle}$ denota somma su coppie di siti i, j primi vicini sul reticolo, e σ_g è il colore di un sito virtuale (*ghost site*) di riferimento mediante il quale si può accendere o meno l'interazione di ciascun sito col campo magnetico.

Infine, merita certo menzione il modello "laser" di Lieb e Hepp[9]. Questo intende descrivere un sistema elementare con due configurazioni di equilibrio (si può ad es. pensare ad un atomo con due soli livelli energetici) in presenza di un campo di radiazione che fa da termostato. Si possono rappresentare i due stati atomici come autostati di un operatore di spin $1/2$, e descrivere il campo fotonico mediante la consueta rappresentazione per operatori di creazione e annichilazione a, $a^\dagger$ (per semplicità di notazione il campo viene qui descritto come mono-modale) con $[a, a^\dagger]=1$. L'Hamiltoniana si scrive

$$H=y\, a^\dagger a + \epsilon\, \sigma^{(z)} + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} [\sigma^{(x)} (a+a^\dagger) + i\, \sigma^{(y)} (a-a^\dagger)] \tag{7}$$

Il sistema presenta una interessante transizione di fase del secondo ordine in cui transisce da uno stato normale per cui $\langle a^\dagger a\rangle = O(1)$ ad uno *super-radiante* caratterizzato da $\langle a^\dagger a\rangle = O(N)$.

Da ultimo, non certo in ordine di importanza, citiamo il modello di Heisenberg[10]. E' questo una specie di *summa* dei modelli precedenti, che si possono quasi tutti in qualche modo ricondurre a casi particolari di esso.

L'hamiltoniana ha la forma generale

$$H = -\sum_{i,j=1}^{N} J_{ij}\, \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j - \vec{B} \cdot \sum_{i=1}^{N} \vec{s}_i \tag{8}$$

J_{ij} è un tensore simmetrico di rango due che descrive l'accoppiamento e dipende dalla distanza $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ fra i siti i e j, ed eventualmente anche dalla orientazione del vettore $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ per sistemi anisotropi. $\vec{B}$ è un campo esterno. I vettori $\vec{s}_i$, $i = 1, \ldots N$ possono essere vettori unitari D-dimensionali (indicheremo invece con d la dimensionalità dello spazio in cui il reticolo è immerso) per il sistema classico, o operatori di spin in quello quantistico, nel qual caso il modello va precisato assegnando l'insieme di relazioni di commutazione delle loro componenti e lo *spin* s che li caratterizza (essi possono assumere solo $2s + 1$ valori discreti; il caso classico si ritrova nel limite $s \to \infty$).

Il modello di Heisenberg originale, $d = D = 3$ nelle sue varie accezioni isotrope e anisotrope (ad esempio il modello $X - Y$[5,11], per il quale $J_{ij}^{(\alpha,z)} = 0$, $\alpha = x, y, z$), non ha ancora soluzione analitica. Risultati esatti si conoscono per la versione *modello sferico*, $D = \infty$, $d = 1, 2, 3$. La forma generalizzata (8) proposta da Stanley[12] appare essere il modello che meglio si è prestato e si presta a dare indicazioni di carattere generale sulle transizioni di fase e sulle proprietà critiche dei fenomeni ad esse connessi. (Va naturalmente osservato che non tutti i modelli risolti esattamente in anni recenti rientrano nella classe (8), fra questi i modelli ferroelettrici e antiferroelettrici di Lieb[13], che mostrano proprietà critiche insolite e assai interessanti).

Per questo, pur essendo il breve elenco presentato ben lungi dall'essere esauriente della intensa attività nel settore, limito qui la rassegna dei modelli, per seguire sulla scorta dei risultati da essi forniti e sulla base delle corrispondenti indicazioni sperimentali l'evoluzione delle teorie di transizione di fase nell'ultimo decennio.

La tabella seguente (Tabella I) riassume tali indicazioni (nella forma di esponenti critici) per alcuni casi tipici.

Ricordiamo che gli esponenti critici corrispondono:

α, α' al calore specifico; $C \sim \vartheta^{-\alpha}$, $\vartheta \to 0+$; $C \sim (-\vartheta)^{-\alpha'}$, $\vartheta \to 0-$
β alla magnetizzazione; $M \sim (-\vartheta)^{\beta}$, $\vartheta \to 0-$

Tabella I [15]

	Sistema	α	α'	β	γ	γ'	δ	ν	ν'	η
	Teoria classica	0 (disc.)	0 (disc.)	$^1/_2$	1	1	3	$^1/_2$	$^1/_2$	0
Modelli (Esatti)	Ising, $d=2$	0 (log.)	0 (log.)	1/8	7/4	7/4	15	1	1	1/4
	Sferico, $d=3$	−1 (cusp.)		$^1/_2$	2		5	1		0
Modelli (numerici)	Ising, $d=3$	0.125	0.125	0.313	1.250	1.250	5	0.638		0.041
	Heisenberg, $s=^1/_2$, $d=3$	0 (?)		0.345	1.375		5	0.702		0.043
Esperimento Fluidi	Argon	< 0.4	< 0.25	0.33	0.6	1.1				
	Xenon		< 0.2	0.350	1.26		4.4			
	Anidride carbonica		< 0.1	0.350	1.26	1.0	4.2			
	Elio 4			0.359	1.24					
Esperimento Ferromagneti	Ferro	−0.120	−0.120	0.34	1.33			0.64		0.07
	Nickel	−0.10	−0.10	0.33	1.32		4.2			
	$YFeO_3$			0.354	1.33	0.7	2.8			
Esperimento Ferroelettrico	Acido squarico, $d=2$			0.13						

(si badi a non confonderlo con l'inverso della temperatura introdotto nella eq. (2))

γ, γ' alla suscettività; $\chi \sim \vartheta^{-\gamma}$, $\vartheta \to 0+$; $\chi \sim (-\vartheta)^{-\gamma'}$, $\vartheta \to 0-$
δ definisce l'eq. di stato; $B \sim M^{\delta}$ (per un magnete)
$p - p_c \sim (n - n_c)^{\delta}$ (per un fluido); $\vartheta = 0$, $n \to n_c$
dove B è il campo magnetico
p la pressione e n la densità.
ν, ν' alla lunghezza di correlazione; $\xi \sim \vartheta^{-\nu}$, $\vartheta \to 0+$; $\xi \sim (-\vartheta)^{-\nu'}$, $\vartheta \to 0-$
η al fattore di struttura; $S(\mathrm{k}) \sim \mathrm{k}^{-2+\eta}$; $\vartheta = 0$, $k \to 0$.

Si deve anche osservare che i risultati numerici sono ottenuti vuoi con simulazioni del processo stocastico (tipo Monte Carlo), vuoi con l'utilizzo di sviluppi in serie, per alte o basse temperature[14]. Entrambi questi metodi hanno una convergenza molto povera e benché negli sviluppi si conoscano talora della serie anche fino a 50 termini, le estrapolazioni alla zona critica non sono sempre del tutto affidabili.

I moderni tentativi di teorie delle transizioni di fase si può dire nascano proprio dalla sfida presentata dal gioco numerologico della Tabella I (i cui dati sono però aggiornati alle conoscenze attuali).

Una proprietà interessante che si osserva subito è la dipendenza degli esponenti critici dalle dimensioni (la quale può essere verificata, in alcuni casi, anche sperimentalmente, vedi l'acido squarico citato in Tabella I), che è assente nelle teorie classiche.

Al confronto con questi dati, il primo tentativo dei fisici teorici fu di stabilire se esistessero o meno delle relazioni fra gli indici critici. Lo strumento usato, la termodinamica classica, con i suoi requisiti di stabilità. Il risultato fu solo parzialmente positivo: la termodinamica fornisce diseguaglianze ma non equazioni che consentano di ridurre il numero di indici indipendenti.

Cito qui, ovviamente senza derivazione, alcune fra le più semplici di tali diseguaglianze. La diseguaglianza di Rushbrooke[16], segue dal vincolo che calore specifico e suscettività siano positivi

$$\alpha' + 2\beta + \gamma' \geqslant 2 \tag{9}$$

La prima diseguaglianza di Griffith[17] è basata sulla richiesta convessità dell'energia libera

$$\alpha' + \beta(1+\delta) \geqslant 2 \tag{10}$$

La seconda,

$$\gamma' \geqslant \beta(\delta - 1) \quad \text{se} \quad \alpha \geqslant \alpha' \tag{11}$$

deriva dalle condizioni $\left(\dfrac{\partial M}{\partial T}\right)_B \leqslant 0$; $\left(\dfrac{\partial^2 M}{\partial B^2}\right)_T \leqslant 0$ per $B > 0$.

Citiamo ancora la diseguaglianza dovuta a Fisher [18]

$$(2-\eta)\,\nu \geqslant \gamma \tag{12}$$

e quella, più complessa, [19]

$$d\,\frac{\delta - 1}{\delta + 1} \geqslant 2 - \eta \tag{13}$$

Questi pochi esempi hanno in comune una caratteristica che fu immediatamente individuata per la sua rilevanza teorica. Le condizioni (9) - (13) valgono esattamente come uguaglianze sia per le teorie classiche che per il modello di Ising $d=2$ e il modello sferico $d=2$, 3; anche se, ovviamente, gli indici corrispondenti hanno valori numerici assai differenti.

Per quanto riguarda gli esperimenti, anche per questi – entro i limiti degli errori – le relazioni (9) - (13) sembrano valere con il segno di uguale. Fu sulla base di queste osservazioni che Widom [20] compì a metà degli anni 60 quello che fu il primo passo, allora puramente fenomenologico, verso un tentativo di teoria.

Combinando la teoria classica nella formulazione di Landau [21] con il requisito di rappresentare i fatti fenomenologici in termini di indici critici, Widom postulò l'ipotesi di scala. In base a tale ipotesi, l'equazione di stato in prossimità del punto critico ha la forma (per semplicità farò riferimento al caso ferromagnetico)

$$B = M\,\psi\,(\vartheta, M^{1/\beta}) \tag{14}$$

dove ψ è una funzione omogenea di ordine γ. Ricordo che una funzione di due variabili, $\psi(x, y)$ si dice omogenea di ordine γ se, dato un arbitrario numero λ, vale la relazione funzionale

$$\psi(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\gamma} \psi(x, y) \qquad (15)$$

L'equazione (14) è autoconsistente termodinamicamente, e compatibile con la identificazione di β e γ con gli indici critici corrispondenti. Inoltre comporta la (11) come identità. Infine produce questa notevole conseguenza: definite le variabili adimensionali

$$h = \frac{B}{|\vartheta|^{\beta+\gamma}} \quad , \quad \mathcal{M} = \frac{M}{|\vartheta|^{\beta}} \qquad (16)$$

l'equazione di stato si scrive nella forma

$$h = \Phi_{\pm}(\mathcal{M}) \qquad (17)$$

dove le funzioni $\Phi_{\pm}$ (il + corrisponde a $\vartheta > 0$, il − a $\vartheta < 0$) sono funzioni universali, cioè sono le stesse per tutti i sistemi che appartengono alla classe definita dalla legge di scala. Non solo, la temperatura entra nell'equazione di stato solo attraverso un fattore di scala.

Un secondo passo importante fu fatto grazie ad una serie di risultati numerici relativi soprattutto al modello di Heisenberg. Studiando la dipendenza degli indici critici calcolati dai parametri che esprimono la anisotropia del modello, si osservò che mentre il segno di questi ultimi – e dunque la simmetria globale del problema – erano molto rilevanti nel determinare il valore numerico degli indici critici, questo risultava praticamente insensibile alle variazioni di grandezza dei parametri – cioè ai dettagli della interazione(22). Ne seguì quella che va sotto il nome di ipotesi di *universalità*. Il comportamento critico di un sistema è determinato dalle caratteristiche più macroscopiche della hamiltoniana, quali la dimensionalità e la simmetria globale, e non dai dettagli minuti della forma del campo di forza.

Fisicamente l'ipotesi di universalità ha un fondamento intuitivo: in prossimità del punto critico i fenomeni divengono predominantemente collettivi e il campo di correlazione diventa molto grande rispetto al raggio di interazione. Appare quindi naturale che piccole modificazioni locali dell'interazione non siano sentite dalle grandezze che dipendono da correlazioni a lungo raggio. Ciò che non appariva ovvio era che legge di scala e ipotesi di universalità fossero legate, e che la prima si potesse derivare dalla seconda. Fu Kadanoff(23) all'inizio degli anni 70 il pioniere su questa strada che sarebbe stata così ricca di conseguenze.

Per fissare le idee discuterò il caso semplice del modello di Ising bidimensionale, su un reticolo quadrato. Oltre all'energia libera F definita in (2), la termodinamica è caratterizzata dalla magnetizzazione

$$M = M(\vartheta, B) = \langle \sigma_i \rangle = \frac{Tr\,\{\sigma_i\, e^{-\beta H}\}}{Tr\,\{e^{-\beta H}\}} \tag{18}$$

e dalla funzione di correlazione spin-spin

$$\Gamma_2 = \Gamma_2\,(r;\, \vartheta,\, B) = \langle \sigma_o\, \sigma_r \rangle \tag{19}$$

dove σ_r denota lo spin in un sito a distanza r dall'origine (dove lo spin è σ_o).

Osservando l'hamiltoniana (4) (con l'interazione (4′), $J > 0$ per il caso ferromagnetico), si può osservare come dal punto di vista puramente energetico le configurazioni più favorevoli siano quelle in cui spin vicini sono paralleli e concordi, e puntano nella direzione del campo magnetico.

Kadanoff propone di raggruppare i siti del reticolo in blocchi identici, di lato La (a è la costante reticolare) dove L è un numero intero grande abbastanza perché

$$a \ll La \ll \xi \tag{20}$$

Poi costruisce un reticolo con la stessa simmetria di quello iniziale, ma di costante reticolare La (Fig. 2).

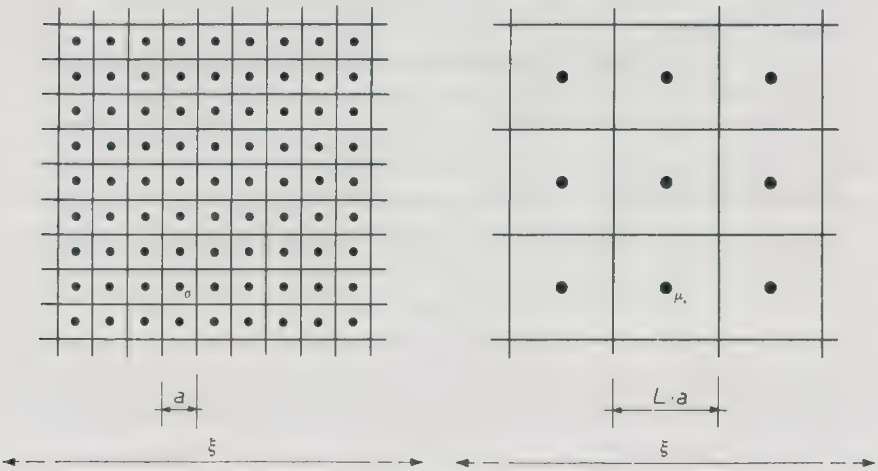


Figura 2

Ciascun blocco contiene L^2 spin fortemente correlati fra di loro in quanto stanno a una distanza reciproca ben entro la lunghezza di correlazione. E' lecito quindi pensare che un numero predominante di essi siano paralleli e concordi (in altre parole che ciascun blocco non sia che una specie di dominio magnetico di Bloch).

Si può dunque associare a ciascun blocco un parametro d'ordine locale, μ_α, che gioca lo stesso ruolo giocato nel modello originale dai singoli spin σ_i. Fra le μ_α esistono ovviamente interazioni, che producono correlazioni, e la simmetria globale del sistema è la stessa. E' a questo punto che entra l'ipotesi di universalità: se essa è corretta la correlazione fra le μ_α nel problema relativo al sistema di blocchi deve avere la stessa struttura della correlazione fra gli spin σ_i nel problema iniziale, perché il parametro L è un dettaglio *irrilevante* nella nuova teoria. La sola differenza fra i due modelli si deve ritrovare nel valore delle variabili ϑ e B (che per il sistema a blocchi indicheremo con ϑ_L e B_L). D'altronde il campo effettivo B_L non può che annullarsi quando B si annulla, e il sistema a blocchi deve diventare critico alla stessa temperatura a cui lo diventa quello a siti, per cui è lecita la posizione *lineare*

$$B_L = b(L)B \quad , \quad \vartheta_L = t(L)\vartheta \tag{21}$$

Per semplicità Kardanoff richiede anche una legge di potenza per le funzioni $b(L)$ e $t(L)$ (che non sono troppo rilevanti, essendo funzioni solo di L):

$$b(L) = L^x \quad , \quad t(L) = L^y \tag{22}$$

L'universalità si traduce ora nelle equazioni

$$\langle \mu_\alpha \rangle = M(\vartheta_L, B_L) \tag{23}$$

$$\langle \mu_o \; \mu_\rho \rangle = \Gamma_2 \; (\rho = \frac{r}{L} \; ; \vartheta_L, B_L) \tag{24}$$

o meglio nel requisito che M e Γ_2 nelle (23), (24) siano le *stesse funzioni* definite dalle (18), (19) rispettivamente. Il processo non è così semplice a prima vista. E' chiaro che l'hamiltoniana effettiva generata dalla riduzione in blocchi del reticolo *non* ha la stessa forma di quella originale e che, in particolare, vi appariranno extra-termini a tre corpi, quattro corpi, etc. Ma ancora una volta gioca la universalità: tali

termini sono irrilevanti nel senso discusso in precedenza, in quanto influenzano soltanto il dettaglio locale dell'interazione, e vengono trascurati. In tal modo è immediato trovare per la magnetizzazione la relazione di scala

$$M(\vartheta, B) = L^{x-d} M(L^y \vartheta, L^x B) \tag{25}$$

che da un lato riproduce l'equazione di stato nella forma universale (17) (è sufficiente scegliere $L = |\vartheta|^{-1/y}$), e consente dall'altro di esprimere gli esponenti x, y in termini di indici critici:

$$x = d\,\frac{\beta+\gamma}{2\beta+\gamma} \quad , \quad y = d\,\frac{1}{2\beta+\gamma} \tag{26}$$

Analoga discussione per la funzione di correlazione Γ_2 (si ricordi che questa non è che la trasformata di Fourier inversa del fattore di struttura $S(k)$) conduce alle relazioni

$$\nu = \nu' = \frac{1}{y} \quad , \quad 2\,(x-d) = 2-d-\eta \tag{27}$$

Le (26), (27) combinate consentono di esprimere ν, ν' ed η in funzione solo di β, γ e d, e ripropongono la relazione di Fisher (12) in forma di uguaglianza.

Una analisi più approfondita mostra che di fatto esistono sette relazioni indipendenti fra i nove indici critici, il che consente di riscrivere la Tabella I in una forma tale che se le relazioni di scala e l'ipotesi di universalità sono valide – tutti i numeri su di una medesima riga(cioè relativi ad uno stesso sistema) debbano risultare uguali. (Tabella II).

Si noti che i modelli risolti esattamente sembrano soddisfare tale requisito, ma i calcoli numerici sembrano indicare che le relazioni che involgono la dimensionalità d non siano invece strettamente consistenti con l'uguaglianza. Soltanto la soluzione esatta, ad es. del modello di Ising con $d = 3$, che si spera prossima, potrà chiarire questo punto. Per quanto riguarda la teoria classica, anche essa rientra nello schema bene, salvo che – ancora una volta – per quelle proprietà che dipendono da d. Questo era però prevedibile per le sue stesse caratteristiche.

Infine si può notare come i dati sperimentali, per le loro fluttua-

Tabella II

	Sistema	$2-\alpha$	$2-\alpha'$	$\gamma+2\beta$	$\gamma'+2\beta$	$\beta(\delta+1)$	$d\nu$	$d\nu'$	$\frac{d\gamma}{2-\eta}$
	Teoria classica	2	2	2	2	2	1.5	1.5	1.5
Modelli (Esatti)	Ising, $d=2$	2	2	2	2	2	2	2	2
	Sferico, $d=3$	3		3		3	3		3
Modelli (Numerici)	Ising, $d=3$	1.875	1.875	1.876	1.876	1.878	1.914		1.916
	Heisenberg, $s=1/2$, $d=3$	2	2	2.065		2.070	2.106		2.108
Esperimento	CO_2		~ 1.9	1.96		1.82			
	Ferromagneti	1.88	1.88	1.99		1.69	1.95		2.06

zioni, non consentono alcuna affermazione defintiva, anche se gli ordini di grandezza sono assai buoni.

L'approccio alla teoria dei fenomeni critici di Wilson, che è all'origine del metodo del gruppo della rinormalizzazione [24,25], parte proprio da questi dati – relativamente grezzi ma significativi – ed è da un lato una riformulazione più economica ed elegante, ed anche più potente matematicamente, di quello di Kadanoff. D'altro lato però esso si propone, per la prima volta, il programma più ambizioso di trovare un formalismo compiutamente operazionale, da cui gli esponenti critici si possono calcolare esplicitamente, e di ricondurre l'esistenza di una transizione di fase alla struttura microscopica del sistema che la subisce.

Nel primo senso il metodo del gruppo della rinormalizzazione [26] ha fornito risultati numerici eccezionalmente buoni – il che costituisce la ragione del suo enorme successo – e si presenta come un validissimo algoritmo di calcolo più che non come una vera e propria teoria.

Per quanto concerne la seconda parte del programma, esso risulta ancora farriginoso e mascherato da troppe ipotesi *ad hoc* ed approssimazioni formalmente non giustificate (ad esempio, come vedremo, un uso spregiudicato della teoria della perturbazione in casi in cui la convergenza è palesemente violata) per poter asserire che esso fornisce una vera e propria spiegazione dei fenomeni fisici in termini fondamentali.

E' certo però che ogni altra teoria che venga proposta in futuro e che si voglia affermare come teoria delle transizioni di fase non potrà non confrontarsi con risultati di questa. La caratteristica distintiva del metodo di Wilson è che viene abolito il requisito che il parametro L sia un numero intero, col che l'ipotesi intuitiva di Kadanoff nello scrivere le (21), (22) è sostituita dalla formulazione di un'equazione differenziale.

Partendo dalle relazioni di scala per l'energia libera e la lunghezza di correlazione

$$F(\vartheta, B) = L^{-d} F(\vartheta_L, B_L) \tag{28}$$

$$\xi(\vartheta, B) = L\, \xi(\vartheta_L, B_L) \tag{29}$$

si osserva che il cambiamento relativo in ϑ_L e B_L indotto dal processo di variazione della dimensione L dei blocchi non deve dipendere esplicitamente dalla lunghezza L stessa. (La scelta di Kadanoff di fatto soddisfa questo criterio; ad esempio $B_{2L} = (2L)^x B = 2^x B_L$, vale a dire B_{2L} dipende solo da B_L e *non* da L).

Ripetendo quindi la procedura di Kadanoff con L continuo, e operando una variazione δL infinitesima di L si ottengono le due equazioni che definiscono il gruppo della rinormalizzazione:

$$\frac{d\vartheta_L}{dL} = -\frac{1}{L} f(\vartheta_L, B_L^2) \tag{30}$$

$$\frac{dB_L}{dL} = \frac{1}{L} B_L\, g(\vartheta_L, B_L^2) \tag{31}$$

dove f e g sono funzioni *analitiche* dei loro argomenti, e si è incluso il fatto che il problema deve essere simmetrico rispetto a un cambiamento di segno di B.

Le equazioni del gruppo di trasformazioni di scala (30), (31), nonostante la loro analogia formale con le equazioni per il gruppo dei moti della meccanica classica, vanno considerate piuttosto come equazioni di stabilità strutturale. Esse definiscono sostanzialmente la struttura dei bacini di stabilità del sistema, più che non la sua *evoluzione* (al variare della temperatura nell'intorno del punto critico). Infatti l'informazione che esse forniscono va interpretata nel modo seguente. Se il sistema inizialmente ($L=1$) si trova in una situazione leggermente diversa da quella critica, poiché – per la (29) – $L\xi_L$ deve essere indipendente da L e quindi al crescere di L la lunghezza di correlazione diminuire, esso si allontana sempre più per L che aumenta dalla situazione critica. Se invece sin dall'inizio si parte in condizioni di criticità ($\vartheta=0$, $B=0$, e $\xi=\infty$) al variare di L il sistema rimane critico ($\xi_L = \infty$). Questo implica che la soluzione delle (30), (31) per condizioni iniziali critiche deve essere $\vartheta_L = 0$, $B_L = 0$, cioè

$$f(0, 0) = 0 \tag{32}$$

($B_L = 0$ è automaticamente una soluzione stazionaria della (31)).

Dunque il punto critico appare essere un punto fisso – instabile –

delle equazioni del gruppo della rinormalizzazione. Ciò stabilito è naturale cercare una soluzione di queste ultime linearizzando nell'intorno del punto critico le funzioni f e g,

$$\frac{d\vartheta_L}{dL} = \frac{1}{L} y\, \vartheta_L \tag{33}$$

$$\frac{dB_L}{dL} = \frac{1}{L} x\, B_L \tag{34}$$

Si ritrovano così le relazioni di scala (21), (22) di Kadanoff, e le (28), (29) si scrivono

$$F(\vartheta, B) = \vartheta^{\frac{d}{y}}\, \phi(B\, \vartheta^{-\frac{x}{y}}) \tag{35}$$

$$\xi(\vartheta, B) = \vartheta^{-\frac{1}{y}}\, \zeta(B\, \vartheta^{-\frac{x}{y}}) \tag{36}$$

dove ϕ e ζ sono funzioni universali.

Se oltre che da ϑ a B energia libera e funzione di correlazione dipendessero da un terzo parametro q nell'hamiltoniana, di quelli che Kadanoff definisce *irrilevanti*, la discussione potrebbe essere ripetuta in termini assai simili. Di fatto l'unica differenza sostanziale è che, essendo maggiore il numero di dimensioni dello spazio dei parametri, la struttura del punto fisso delle equazioni del gruppo di rinormalizzazione risulta in tal caso più complessa: esso può essere un nodo, un fuoco, un punto a sella, o addirittura può non esistere un unico punto fisso ma un ciclo limite. L'analisi di questa casistica più generale, dovuta soprattutto a Nauenberg[(27)], Nelson e Fisher[(28)], Aharony[(29)], etc. conferma l'intuizione di Kadanoff. Il parametro q è di fatto irrilevante (matematicamente, nel senso che il punto fisso si può raggiungere qualunque sia il suo valore iniziale); e quindi non solo le leggi di scala, ma anche il principio di universalità segue dalle equazioni del gruppo di rinormalizzazione. Più in dettaglio la presenza dell'ulteriore parametro (o parametri, la discussione può essere estesa ad un numero qualsiasi di dimensioni dello spazio dei parametri) ha come solo effetto di cambiare la forma delle funzioni ϕ e ζ ma le (35), (36) continuano a valere. Tuttavia il comportamento critico normale si trova solo se il punto fisso è un punto a sella.

Il risultato nuovo sta nel fatto che l'esistenza delle equazioni del

gruppo della rinormalizzazione (con quest'ultima caratterizzazione del punto fisso) pare essere ciò che definisce la classe di hamiltoniane che conducono al comportamento critico. Di qui il problema successivo della teoria. Occorre rendere più precisa la definizione di tale classe di operatori, in modo che le equazioni del gruppo possano essere derivate, piuttosto che postulate, e quindi gli esponenti critici calcolati e non introdotti fenomenologicamente.

I primi passi in questa direzione sono ancora stati fatti da Wilson, e successivamente da vari autori(30) (non citati nelle referenze per mancanza di spazio A.A. Migdal, P. Pfeuty e molti altri) con una tecnica che mappa il processo di variazione di scala caratteristico del gruppo in un sistema iterativo di equazioni integrali. L'ingrediente base è la funzione di partizione

$$Z = \sum_{\{\text{configurazioni}\}} e^{-\beta H} = Tr\, \{e^{-\beta H}\} \tag{37}$$

L'idea informatrice della procedura è di eseguire parzialmente la somma sulle configurazioni, scegliendo in modo opportuno un sottoinsieme di esse, per cui l'operazione risulti abbastanza semplice.

Scrivendo il risultato nella forma

$$Z \equiv Z^{(0)} = I_0\, Z^{(1)} \tag{38}$$

dove I_0 è il fattore noto che proviene dalla somma eseguita, si definisce poi una nuova hamiltoniana $H^{(1)}$ richiedendo che $Z^{(1)}$ abbia – tutt'al più a meno di un fattore moltiplicativo – *esattamente* la stessa *forma* di $Z^{(0)}$. Questo requisito si può rifrasare chiedendo che $H^{(1)}$ corrisponda come forma ad $H^{(0)} \equiv H$, salvo una ridefinizione opportuna delle costanti di accoppiamento. Tale procedura, iterata, produce una sequenza

$$H^{(l+1)}\,(\{J_l\}) = H^{(l)}\,(\{J_{l+1}\}) \;,\; l = 0, 1, 2, ... \tag{39}$$

dove $\{J_l\}$ denota l'insieme delle costanti di accoppiamento effettive alla l-esima iterazione. Le (39) possono essere interpretate o come una legge di trasformazione nello spazio degli operatori H, o come una relazione di ricorrenza (alle differenze finite anziché differenziale, ma questo è un punto di minore importanza) nelle costanti di accoppiamento. In entrambe le accezioni esse non sono che una riformulazione delle equazioni del gruppo di rinormalizzazione. Il fatto

importante è che esse derivano non da una imposizione delle relazioni di scala, ma sono intimamente legate alla struttura della funzione di partizione. Il punto critico è identificato ancora con un punto fisso, dalle (39). E' interessante analizzare un poco più in dettaglio una fra le moltissime applicazioni.

L'l-esima iterata dell'hamiltoniana è della forma

$$\beta H^{(l)} = \frac{1}{2}\int d^d \vec{x} \, \nabla s_l(\vec{x}) \cdot \nabla s_l(\vec{x}) + \int d^d \vec{x} \, Q_l(\{s_l(\vec{x})\}) \quad (40)$$

ed è caratterizzata dalla relazione di ricorrenza

$$Q_{l+1}(y) = -2^d \ln \left\{ \frac{I_l (2^{1-\frac{d}{2}} y)}{I_l(0)} \right\} \quad (41)$$

dove I_l è un funzionale di Q_l:

$$I_l(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp \left\{ -y^2 - \frac{1}{2} Q_l(y+z) - \frac{1}{2} Q_l(-y+z) \right\} \quad (42)$$

L'hamiltoniana iniziale $H \equiv H^{(0)}$ è del tipo di Ginzburg-Landau[31], per un campo scalare di spin $s(\vec{x})$ non vincolato. Nella approssimazione lineare, cioè, indicando con $Q_c(z)$ il valore della iterata di Q al punto fisso, per $Q_l(z) - Q_c(z)$ uniformemente piccolo, tenuto al primo ordine, le (41), (42) si scrivono

$$Q_{l+1}(z) - Q_c(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \mathscr{T}(z\,|\,y) \, [Q_l(y) - Q_c(y)] \quad (43)$$

Esiste una soluzione della forma

$$Q_l(z) - Q_c(z) = \mu^l q(z) \quad (44)$$

dove μ e $q(z)$ sono rispettivamente autovalori e autofunzioni della equazione integrale di Kernel $\mathscr{T}(z|y)$,

$$\mu \, q(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \mathscr{T}(z\,|\,y) \, q(y) \quad (45)$$

I coefficienti critici microscopici si possono calcolare esplicitamente a partire dalla funzione di partizione, e si trova

$$\gamma = \frac{2}{y_M} \quad , \quad \nu = \frac{1}{y_M} \quad , \quad \eta = 0 \tag{46}$$

dove

$$y_M = \log_2 \{\max(\mu)\} \tag{47}$$

In altre parole il comportamneto critico è controllato dal più grande fra gli autovalori dell'equazione (45) – un fatto questo caratteristico dei processi stocastici in generale, che trova la sua giustificazione nell'elegante derivazione dell'eq. (45) dal teorema del limite centrale, di Jona-Lasinio.[(33)]

Per rendere l'esempio più esplicito, specializziamo l'interazione Q, ponendo

$$Q(y) \equiv Q_0(y) = a_0 y^2 + b_0 y^4 \tag{48}$$

dove a_0 e b_0 sono entrambi $O(\epsilon)$, ϵ essendo un parametro infinitesimo caratteristico, che per il momento non viene specificato.

Assumendo che anche le iterate a_l, b_l, $l = 1, 2, \ldots$ in

$$Q_l(y) = a_l y^2 + b_l y^4 \tag{49}$$

siano $O(\epsilon)$; le relazioni di ricorrenza (41), (42) si scrivono – al secondo ordine in ϵ –

$$a_{l+1} = 4(a_l + 3b_l - 3a_l b_l - 9b_l^2) + O(\epsilon^3) \tag{50}$$

$$b_{l+1} = 16\, 2^{-d}\, (b_l - 9b_l^2) + O(\epsilon^3) \tag{51}$$

una coppia di semplici equazioni di ricorrenza algebriche. Queste si possono in linea di principio risolvere, sia pure con qualche riserva derivante dalla loro somiglianza strutturale con un mapping di Hénon[(34)], che rende problematica la loro convergenza a un punto fisso per certe coppie di valori iniziali, a_0, b_0[(35)].

Tuttavia esse non hanno significato fino a che non si identifica il parametro ϵ, e se ne verifica la piccolezza. Ora da una parte si è visto nella discussione svolta finora che la dimensione gioca un ruolo importante nella fenomenologia dei processi critici; dall'altra la (51) mostra che $d = 4$ è un valore speciale per la convergenza dei parametri a_l, b_l a un punto fisso, in quanto per $d \lesseqgtr 4$ il coefficiente moltiplicativo a secondo membro è $\gtreqless 1$ rispettivamente. Sulla base di questa

osservazione Brézin, Wilson[36], Zinn-Justin[37] ed altri proposero di considerare d come variabile continua anziché intera, e scrivere

$$d = 4 - \epsilon \tag{52}$$

La (51) diviene quindi

$$b_{l+1} = (1 + \epsilon \ln 2)\, b_l - 9\, b_l^2 \tag{53}$$

e la (53) con la (50) producono due punti fissi

$$P_1 \;:\; b^{(1)} = 0 \;,\; a^{(1)} = 0 \quad \text{con } \mu_M = 4$$

$$P_2 \;:\; b^{(2)} = \epsilon \frac{\ln 2}{9} \;,\; a^{(2)} = -\epsilon \frac{4 \ln 2}{9} \quad \text{con } \mu_M = 4 - \epsilon \frac{4 \ln 2}{3}$$

Un'accurata analisi della struttura delle equazioni nell'intorno di tali punti mostra che:

i) per $\epsilon < 0$, cioè $d > 4$, P_2 è un nodo mentre P_1 è un punto a sella. Secondo la discussione generale, quindi, P_2 è inaccettabile, ed è P_1 che deve essere identificato con il punto critico. Ne segue, per le (46), che

$$\gamma = 1 \;,\; \nu = \frac{1}{2} \;,\; \eta = 0 \quad \text{per } d \geqslant 4$$

Si noti che questi valori sono indipendenti da ϵ e sono esattamente quelli caratteristici della teoria classica.

ii) per $\epsilon > 0$, $d < 4$, P_2 è un punto a sella, P_1 un nodo, e dunque, al primo ordine in ϵ,

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{6}\epsilon \;,\; \nu \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\epsilon \;,\; \eta = 0 \quad \text{per } d \leqslant 4.$$

La cosa più sorprendente è che ponendo $\epsilon = 1$, un valore apparentemente incompatibile con la procedura perturbativa adottata, le formule precedenti forniscono

$$d = 3 \;,\; \gamma = \frac{7}{6} \approx 1.167 \;,\; \nu = \frac{7}{12} \approx 0.583 \;,\; \eta = 0$$

Il confronto con i risultati numerici per il modello di Ising in tre

dimensioni, che è proprio isomorfo[38] ad una teoria di campo della forma definita dalle (40) ($l=0$) e (48), per cui

$$\gamma=1.250 \quad , \quad \nu=0.638 \quad , \quad \eta=0.041 \, ,$$

è certamente impressionante, seppure non molto comprensibile.

E' interessante ricordare che l'idea di definire ϵ come nella (52) ed utilizzarlo come parametro perturbativo è stata portata anche fuori dall'ambito del gruppo della rinormalizzazione. In uno schema più convenzionale di sviluppo grafico, tale concetto consente il calcolo degli esponenti critici per arbitraria dimensionalità D degli spin[12]. Si trova così — ancora con la scelta non ortodossa $\epsilon=1$[39] — un insieme di risultati di cui la tabella seguente fornisce un esempio che non richiede commento ($d=3$; si ricordi che $D=1, 3, \infty$ definiscono rispettivamente il modello di Ising, di Heisenberg e sferico):

Tabella III

Esponente	γ		η	
D	Calcolo perturbativo in ϵ	Miglior stima	Calcolo perturbativo in ϵ	Miglior stima
1	1.244	1.250	0.037	0.041
3	1.347	1.375	0.039	0.043
∞	1.750	2 (esatto)	0	0 (esatto)

Esiste uno sviluppo complementare, sia pure operante nello stesso spirito, a quello in ϵ; fatto in $\frac{1}{n}$ dove n è il numero di *componenti* (non la dimensionalità!) degli spin. Esso non viene qui discusso e rimando per una esauriente rassegna alla ref.[40].

Sono ancora da citare gli interessanti risultati di Mandelbrot, Aharony ed altri[41], che considerano modelli tipo Ising non su reticoli, ma su sistemi frattali auto-simili. Questi ultimi si prestano in modo naturale all'adozione dei principi di base del gruppo di rinormalizzazione, ed hanno dimensione di Hausdorff non intera per definizione. Essi possono essere quindi la chiave alla comprensione

di tale teoria e dei suoi successi. Naturalmente la comprensione più profonda dei meccanismi microscopici che producono transizioni di fase è probabilmente altrove. La ricerca in questo senso è complessa e difficile; soprattutto, come accennato, essa richiede talora l'utilizzo di tecniche matematiche molto sofisticate, e si può dire che l'intero arsenale della matematica moderna, dalla teoria della stabilità strutturale a quella dei fibrati, dall'analisi funzionale alla teoria dei nodi, alla teoria dei numeri, sia stato ormai messo in campo.

Soltanto in tempi relativamente recenti è cominciato ad apparire evidente che la struttura formale di una teoria di campo quantistica definisce di fatto una teoria. Tale progresso è stato reso possibile dalla ripresa da parte di Symanzik[(42)] della osservazione di Bloch[(43)] che, se il tempo t in una teoria di campo è sostituito da $i\beta$, quello che ne risulta è un sistema meccanico statistico classico. E. Nelson[(44)] fece un passo avanti fondamentale quando dimostrò che a partire da un campo random correlato in uno spazio Euclideo, che soddisfi alla proprietà di Markov[(45)] (la quale implica, rozzamente parlando, che se per un dato sistema si ha un'informazione completa sul contorno di una regione, non si può guadagnare alcune informazione addizionale circa l'interno aumentando la conoscenza dell'esterno), si può costruire, a partire da essa, una teoria di campo quantistica che soddisfa a tutti gli assiomi di Wightman[(46)].

Questa idea è assai importante perché conduce alla identificazione di un campo random con un sistema meccanico statistico su di un reticolo discreto (Guerra, Rosen e Simon[(48)]) e consente di identificare il ruolo che nell'innescare processi critici e transizioni di fase giocano le varie componenti. In particolare il metodo dei *limiti infrarossi*[(48)] (Frölich, Spencer, Lieb, Dyson, etc.) è di fatto il solo strumento fino ad ora disponibile per dimostrare rigorosamente che una transizione di fase avviene in corrispondenza della rottura di una simmetria continua.

Un breve commento sul ruolo delle simmetrie, così rilevante in questo contesto, come peraltro in tutte le scienze naturali. L'idea chiave è che le simmetrie che caratterizzano le forze presenti in un sistema e gli stati del sistema stesso possono essere diverse, ma sono in qualche modo legate. Per essere più espliciti; ad esempio l'interazione fra coppie di atomi (o ioni) è invariante Euclidea, pur tuttavia

esistono i cristalli ed i loro gruppi di invarianza (le 230 classi dei gruppi cristallografici) contengono solo rotazioni e traslazioni discrete. Questo è tipico di ogni transizione di fase: durante la transizione un sistema passa da uno stato simmetrico ad uno meno simmetrico: la simmetria è *rotta spontaneamente*[(49)].

Occorre precisare che se G è il gruppo di simmetria del problema, l'*insieme* di tutte le soluzioni ha la simmetria di G, ma una data soluzione s potrebbe essere invariante solo rispetto ad un sottogruppo G_s di G. G_s viene detto piccolo gruppo, o gruppo di *isotropia* di s. Per azione di G su s si può costruire una famiglia di soluzioni, l'orbita $G(s)$ di s. Se G è finito e $|G|$, $|G_s|$ sono i numeri di elementi in G e G_s rispettivamente, il numero di elementi di $G(s)$ è

$$|G(s)| = |G|/|G_s| \tag{54}$$

Se invece G e G_s sono gruppi topologici abbiamo un fibrato principale di cui G_s è la fibra, $G(s)$ la base e G il fibrato; e – per G=gruppo di Lie, e $G_s \equiv H$=sottogruppo chiuso di G –

$$|G(s)| = \dim G - \dim H \tag{55}$$

L'insieme S delle soluzioni – in generale dipendente da uno o più parametri – ha in generale una topologia, e può anche essere una varietà o uno spazio vettoriale. Variando un parametro si segue una traiettoria t in S.

Ora le orbite di G si possono classificare in classi: si definisce *strato* l'unione di tutte le orbite della stessa classe rispetto all'azione di G. Quando t passa da uno strato ad un altro, si ha un cambiamento di simmetria.

Per azione continua di gruppi topologici, gli strati con gruppo di isotropia più esteso (e orbite più piccole) sono insiemi chiusi (Palais[(50)]). Dunque muovendo in modo generico uno o più parametri, la traiettoria entro uno strato può raggiungere il contorno, che è in generale uno strato chiuso con simmetria più alta. Le simmetrie sono tendenzialmente *stabili*, e la loro rottura è un'eccezione. Questa avviene quando nel passaggio di strato t subisce una *biforcazione* in orbite di minore simmetria.

I problemi che si aprono quindi, per identificare e classificare le transizioni di fase sono i seguenti. Se esistano in modo naturale nella teoria strati differenti e quali tipi di orbite essi contengano. Questo è

equivalente a individuare G e studiare in quali sottogruppi esso si può rompere.

Nel caso, tipico della fisica, in cui il problema abbia una formulazione variazionale, la teoria di Morse indica l'esistenza di relazioni fra gli estremi di funzioni G-invarianti su varietà compatte, che corrisponde all'esistenza di orbite *isolate*[51] negli strati relativi, le quali sono responsabili della struttura delle biforcazioni. Occorre stabilire quali relazioni esistano fra la topologia delle varietà e l'algebra generata da G. La tendenza della moderna teoria delle transizioni di fase è di individuare in tali relazioni il meccanismo della rottura di simmetria responsabile delle transizioni di fase.[52]

L'oggetto che è stato individuato[53] a identificare e classificare eventuali transizioni di fase per un assegnato sistema (ovviamente nel limite termodinamico) è l'indice di Atiyah-Singer[54] di un opportuno operatore T. Quest'ultimo è legato all'hamiltoniana H attraverso il morfismo del sottofibrato del fibrato principale generato da G e G_s, indotto dalla caratterizzazione dello spazio totale come spazio di tutti gli stati microscopici del sistema, e dalla definizione di *stato termodinamico* come sezione trasversale del fibrato.

L'indice

$$\text{index } T = \dim \ker T - \dim \operatorname{coker} T \tag{56}$$

che assume i valori nel corpo degli interi, varia di un numero intero quando nello spazio dei parametri il punto che caratterizza lo stato termodinamico attraversa la sottovarietà corrispondente a biforcazione equivariante delle orbite. La corrispondenza formale fra biforcazione equivariante e rinormalizzazione è ancora oggetto di studio, e richiederà come terreno di verifica la soluzione esatta di almeno un modello in tre dimensioni.

BIBLIOGRAFIA

(1) E. Ising, *Z. Physik* **31**, 253 (1925).

(2) L. Onsager, *Phys. Rev.* **65**, 117 (1944).
H. N. V. Temperley, P.T.C.P. vol. 1, p. 227 (1972).
B. M. Mc Coy e T. T. Wu, "The Two-Dimensional Ising Model", Harvard University Press, Cambridge, Mass. (1973).

(3) S. Samuel, *J. Math. Phys.* **12**, 2820 (1980).

(4) C. N. Yang e T. D. Lee, *Phys. Rev.* **87**, 410 (1952).

(5) P. R. Zilsel, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 476 (1965) .

(6) R. J. Baxter, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 832 (1971) e *Ann. Phys.* (N.Y.) **70**, 193 (1972).

(7) R. J. Baxter, *J. Phys. A: Math. Gen.* **13**, L61 (1980).

(8) R. B. Potts, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **48**, 106 (1952).

(9) K. Hepp e E. H. Lieb, *Ann. Phys.* (N.Y.) **76**, 360 (1973).

(10) W. Heisenberg, *Z. Physik* **49**, 619 (1928).
P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* (London) **A123**, 714 (1929).
G. S. Rushbrooke, G. A. Baker e P. J. Wood, P.T.C.P. vol. 3, p. 245 (1974).

(11) D. D. Betts, P.T.C.P. vol. 3, p. 569 (1974).

(12) H. E. Stanley, P.T.C.P. vol. 3, p. 485 (1974).

(13) E.H. Lieb, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 1046 (1967) e **19**, 108 (1967); P.T.C.P. vol. 1, p. 331, (1972).

(14) P.T.C.P. vol. 3, (1974).

(15) Per ragioni di spazio non riporto le referenze relative ai dati sperimentali in Tabella I. Vedi P.T.C.P. Vol. 2 (1972); 5A, 5B (1976).

(16) G. S. Rushbrooke, *J. Chem. Phys.* **39**, 842 (1963).

(17) R. B. Griffiths, *J. Chem. Phys.* **43**, 1958 (1965).

(18) M. E. Fisher, *Phys. Rev.* **180**, 594 (1969).

(19) M. J. Buckingham e J. D. Gunton, *Phys. Rev.* **178**, 848 (1969).

(20) B. Widom, *J. Chem. Phys.* **43**, 3898 (1965).

(21) L. D. Landau, *Phys. Z. Sovjet.* **11**, 26 e 545 (1937).

(22) G. Paul e H. E. Stanley, *Phys. Lett.* **37A**, 328 e 347 (1971), *Phys. Rev.* **B5**, 2578 e 3715 (1972).

(23) C. P. Kadanoff, *Physics* **2**, 263 (1966).
L. P. Kadanoff, W. Gotze, D. Hamblen, R. Hecht, E. S. Lewis, V. V. Palciauskas, M. Rayl, J. Swift, D. Aspnes e J. Kane, *Revs. Mod. Phys.* **39**, 395 (1967).

(24) K. G. Wilson, *Phys. Rev.* **D2**, 1438 (1970) e **B4**, 3174 e 3184 (1971).

(25) K. G. Wilson, *Revs. Mod. Phys.* **47**, 773 (1975).

(26) La denominazione di "gruppo di rinormalizzazione" deriva dalla connessione, non solo formale, fra la procedura di scala che conduce alle equazio-

ni di Wilson, e le proprietà di scala delle funzioni di Green in elettrodinamica quantistica a piccole distanze discusse inizialmente da:
M. Gell-Mann e F. E. Low, *Phys. Rev.* **95**, 1300 (1954).

(27) M. Nauenberg e B. Nienhuis, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 1056 (1975).
M. Nauenberg, *J. Math. Phys.* **16**, 703 (1975) e *J. Phys.* **A8**, 925 (1975).

(28) D. R. Nelson e M. E. Fisher, *Ann. Phys.* (N.Y.) **91**, 226 (1975).

(29) A. Aharony, P.T.C.P. vol. 6, p. 357 (1976).

(30) K. G. Wilson e J. Kogut, *Phys. Rep.* **12C**, 76 (1974).
S. K. Ma, *Revs. Mod. Phys.* **45**, 589 (1973).
T. L. Bell e K. G. Wilson, *Phys. Rev.* **B10**, 3935 (1975).
C. Di Castro, in "International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics", a cura di H. Araki, p. 342, Springer Verlag, Berlino (1975).

(31) L. D. Landau e E. M. Lifshitz, "Fisica Statistica", Editori Riuniti, Roma (1979).

(32) M. Kac, *Proc. Amer. Math. Soc. Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley (1951), p. 189.

(33) G. Jona-Lasinio, *Nuovo Cimento* **26**, 99 (1975).

(34) M. Hénon, *Quart. Appl. Math.* **27**, 291 (1969) e *Commun. Math. Phys.* **50**, 69 (1976).
M. Hénon e C. Heiles, *Astron. J.* **69**, 73 (1964).

(35) R. G. Helleman, in "Statistical Mechanics and Statistical Methods in Theory and Application", a cura di U. Landman, Plenum Press, New York, (1977), p. 343.

(36) K. G, Wilson, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 548 (1972).

(37) E. Brézin, J. C. le Guillou, J. Zinn-Justin e B. G. Nickel, *Phys. Lett.* **44A**, 227 (1973).

(38) B. Simon e R. B. Griffiths, *Commun. Math. Phys.* **33**, 145 (1973).

(39) Le difficoltà nella convergenza dello sviluppo in ϵ sono discusse da D. J. Wallace, P.T.C.P. vol. 6, p. 293 (1976).

(40) S. K. Ma, P.T.C.P. vol. 6, p. 249 (1976).

(41) Y. Gefen, B. B. Mandelbrot e A. Aharony, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 855 (1980).

(42) K. Symanzik, *J. Math. Phys.* **7**, 910 (1966).

(43) Devo al prof. Giancarlo Wick il riferimento a Bloch, durante una conversazione proprio nel corso di questo convegno.

(44) E. Nelson, *J. Functl. Anal.* **12**, 97 (1973).

(45) K. Osterwalder e R. Schrader, *Comm. Math. Phys.* **31**, 83 (1973).

(46) R. F. Streater e A. S. Wightman, "PCT, Spin, Statistics and All That", Benjamin Publ., New York, (1965).

(47) F. Guerra, L. Rosen e B. Simon, *Ann. Math.* **101**, 111 e 191 (1975).

(48) J. Frölich, B. Simon e T. Spencer, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 804 (1976) e *Comm. Math. Phys.* **50**, 79 (1976).
F. Dyson, E. H. Lieb e B. Simon, *J. Stat. Phys.* **18**, 335 (1978 e *Phys. Rev. Lett.* **37**, 120 (1976).

(49) N. Boccara, "Symétries Brisées: Théorie des transitions avec paramètre d'ordre", Publ. Herman, Parigi, (1978).
L. Michel, *J. de Physique* **36**, 7 (1975).

(50) R. Palais, *Mem. Am. Math. Soc.* **36**, (1960).

(51) L. Michel, *C. R. Acad. Sci.* (Paris) **272**, 433 (1971) e in "Statistical Mechanics and Field Theory", a cura di R. N. Sen e C. Weil, Israel University Press, Gerusalemme (1972), p. 133.

(52) R. B. Israel, *Comm. Math. Phys.* **43**, 59 (1975).
V. de Alfaro e M. Rasetti, *Forstschritte der Physik*, **26**, 143 (1978).
J. Glimm, A. Jaffe e T. Spencer, *Comm. Math. Phys.* **45**, 203 (1975).
J. Frölich, R. B. Israel, E. H. Lieb e B. Simon, *Comm. Math. Phys.* **62**, 1 (1978).

(53) M. Rasetti, in "Structural Stability in Physics", a cura di W. Güttinger e H. Eikemeier, Springer Verlag, Berlino (1978), p. 159.
M. Rasetti, in "Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics" Springer Tracts in Physics, a cura di H. D. Döbner, Springer Verlag, Berlino (1980), p. 297.
M. Rasetti, in "Selected Problems in Theoretical and Mathematical Physics", a cura di N. N. Bogolubov, Jr. e A. M. Kurbatov, J.I.N.R. Publ., Dubna (1980), p. 140.

(54) M. F. Atiyah e I. M. Singer, *Bull. Amer. Math. Soc.* **69**, 422 (1963).
R. Palais, *Ann. of Math. Studies* # 57, Princeton University Press (1965).

NOTA: P.T.C.P. sta per "Phase Transitions and Critical Phenomena", a cura di C. Domb e M. S. Green; Academic Press, N. Y.

Fenomeni non lineari in teoria dei campi

Ferdinando Gliozzi e Stefano Sciuto *

Al prof. Mario Verde in occasione del suo sessantesimo compleanno, grati per il suo insegnamento.

Pare oggi fuor di dubbio che le teorie di gauge siano lo strumento più adatto per la descrizione delle interazioni fondamentali della natura.

Queste teorie sono utilizzate in due forme piuttosto diverse. Nella teoria unificata delle interazioni deboli e elettromagnetiche lo spettro delle particelle descritte non è molto diverso da quello dei campi che compaiono nella lagrangiana: i leptoni, il fotone e i bosoni intermedi, che acquistano massa per effetto Higgs.

Viceversa i campi fondamentali (quark e gluoni) che appaiono nella lagrangiana delle interazioni forti (QCD) non hanno una interpretazione fisica così diretta.

E' sì possibile provare sperimentalmente, in modo indiretto e con diverso grado di affidabilità, l'esistenza di quark e gluoni, ma solo guardando all'interno della materia adronica, a distanze molto piccole rispetto alle dimensioni degli adroni.

L'osservazione suggerisce che i quark e i gluoni siano rispettivamente tripletti e ottetti di un nuovo numero quantico, il colore, di cui la QCD è la teoria di gauge e che i soli stati fisicamente osservabili siano singoletti di colore, ottenibili come stati legati dei campi fondamentali.

I quark sono quindi quasi liberi all'interno degli adroni ma "confinati" da un potenziale crescente con la distanza che impedisce loro di allontanarsi a distanze $\gtrsim 10^{-13}$ cm.

---

* Istituto di Fisica Teorica dell'Università di Torino.
I.N.F.N. Sezione di Torino.
Scuola di Specializzazione in Fisica Nucleare, Università di Torino.

Lo schema teorico fornito dalla QCD non è incompatibile con queste ipotesi suggerite dall'esperienza.

Infatti la libertà asintotica, di cui gode la QCD, prevedendo che la costante d'accoppiamento effettiva g^2 (Q^2) diventi piccola per piccole distanze, permette di usare lo sviluppo perturbativo in g^2 della QCD per lo studio di processi con grandi momenti trasferiti.

Viceversa il fatto che g^2 (Q^2) diventi grande per distanze dell'ordine delle dimensioni adroniche suggerisce il confinamento ma non basta certo a provarlo. L'unica cosa certa che ci dice il crescere di g^2 è che per distanze dell'ordine delle dimensioni adroniche non ha più senso usare lo sviluppo perturbativo nella costante d'accoppiamento.

La risoluzione dell'affascinante problema del confinamento (e quindi della spettroscopia adronica) richiede quindi l'uso di metodi non perturbativi (ovvero perturbativi in parametri diversi da g^2).

In questa conferenza, discutendo alcuni di questi metodi e delle problematiche connesse, useremo spesso il linguaggio della meccanica statistica. Esiste infatti un legame strettissimo fra questa e la teoria dei campi:[1,2,3] una rotazione di Wick manda una teoria dei campi in d dimensioni spazio temporali in un modello di meccanica statistica in d dimensioni spaziali, come è illustrato nella tabella seguente.

Molto spesso, in particolare nelle teorie di gauge, i campi possono essere riscalati in modo da fattorizzare la costante d'accoppiamento davanti all'azione:

$$S(g) = \frac{1}{g^2} S(g=1);$$

in tal modo nell'analogo statistico la costante d'accoppiamento g^2 svolge il ruolo di temperatura.

Ora si conoscono diversi sistemi statistici in cui si manifestano in modo del tutto naturale delle forze confinanti.

Per esempio all'interno dei superconduttori non può esistere un campo magnetico diffuso; nei superconduttori di tipo II si possono tuttavia avere tubi di flusso magnetico di dimensioni finite in cui il flusso è quantizzato (vortici di Abrikosov) (vedi figura 1).

Se esistessero dei monopoli magnetici,[4] questi potrebbero essere osservati nello spazio vuoto o in un mezzo ordinario, ma sarebbero confinati all'interno di un superconduttore;[5,6,7] infatti una coppia monopolo antimonopolo immersa in superconduttore (di tipo II)

Rotazione di Wick

$x^d = it$

Teoria dei campi	*Meccanica statistica*
$\phi(x^1, \ldots x^{d-1}, t)$ t reale	$\phi(x^1, \ldots x^d)$ x^d reale
$ds^2 = \sum_{i=1}^{d-1} (dx^i)^2 - dt^2$	$ds^2 = \sum_{i=1}^{d} (dx^i)^2$
$Z = \int D\phi \, e^{iS/\hbar}$ ↑ funzionale generatore delle funzioni di Green	$Z = \int D\phi \, e^{-H/kT}$ ↑ funzione di partizione
$S = \int d^{d-1}x \, dt \left[\frac{1}{2} \partial_t \phi \, \partial_t \phi - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d-1} \partial_i \phi \, \partial_i \phi - V(\phi) \right]$ ↑ azione	$H = S_E = \int \left[d^d x \; \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \partial_i \phi \, \partial_i \phi + V(\phi) \right]$ ↑ S_E: azione euclidea ↑ H: Hamiltoniana

SUPERCONDUTTORI DI II° TIPO

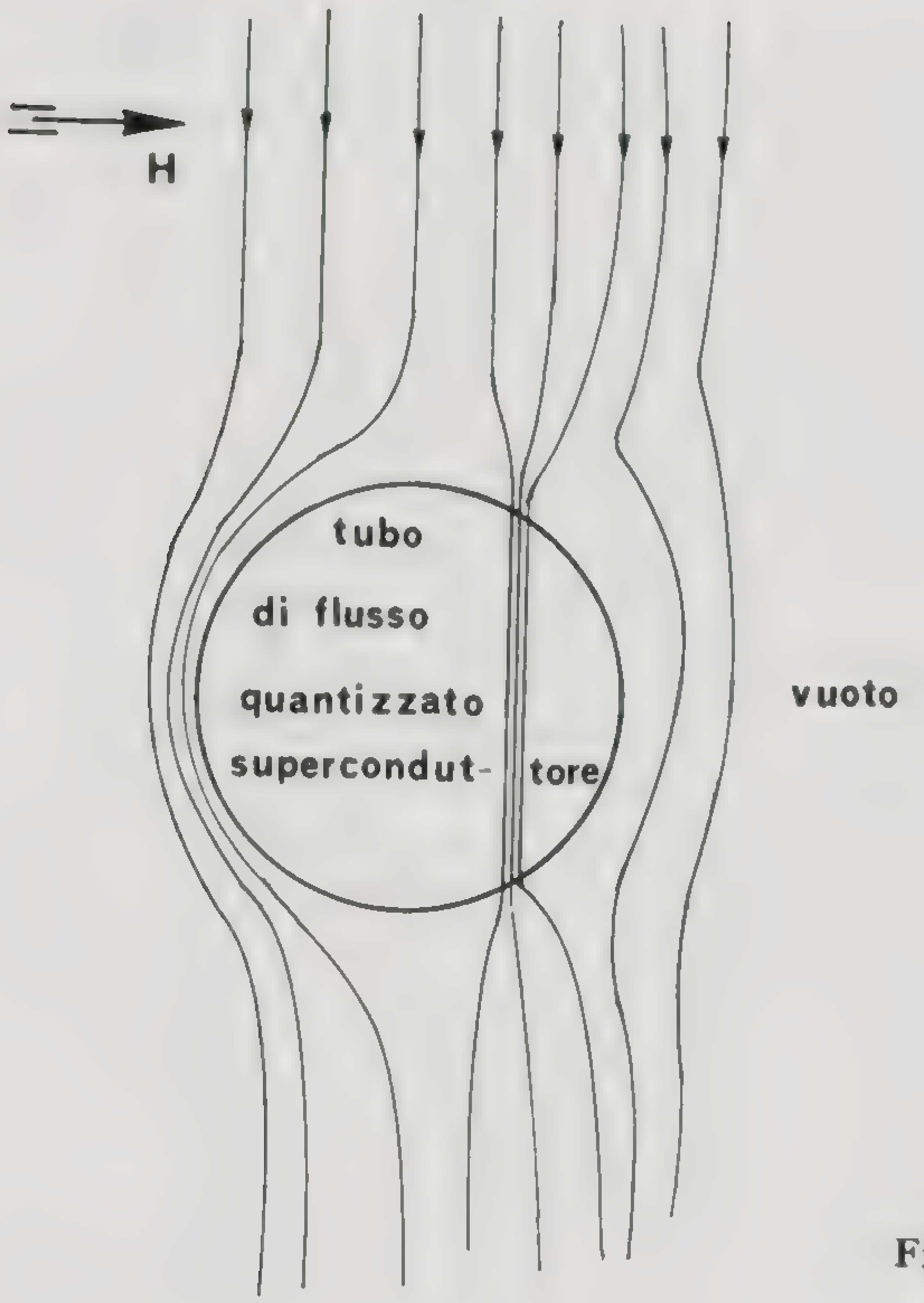


Figura 1

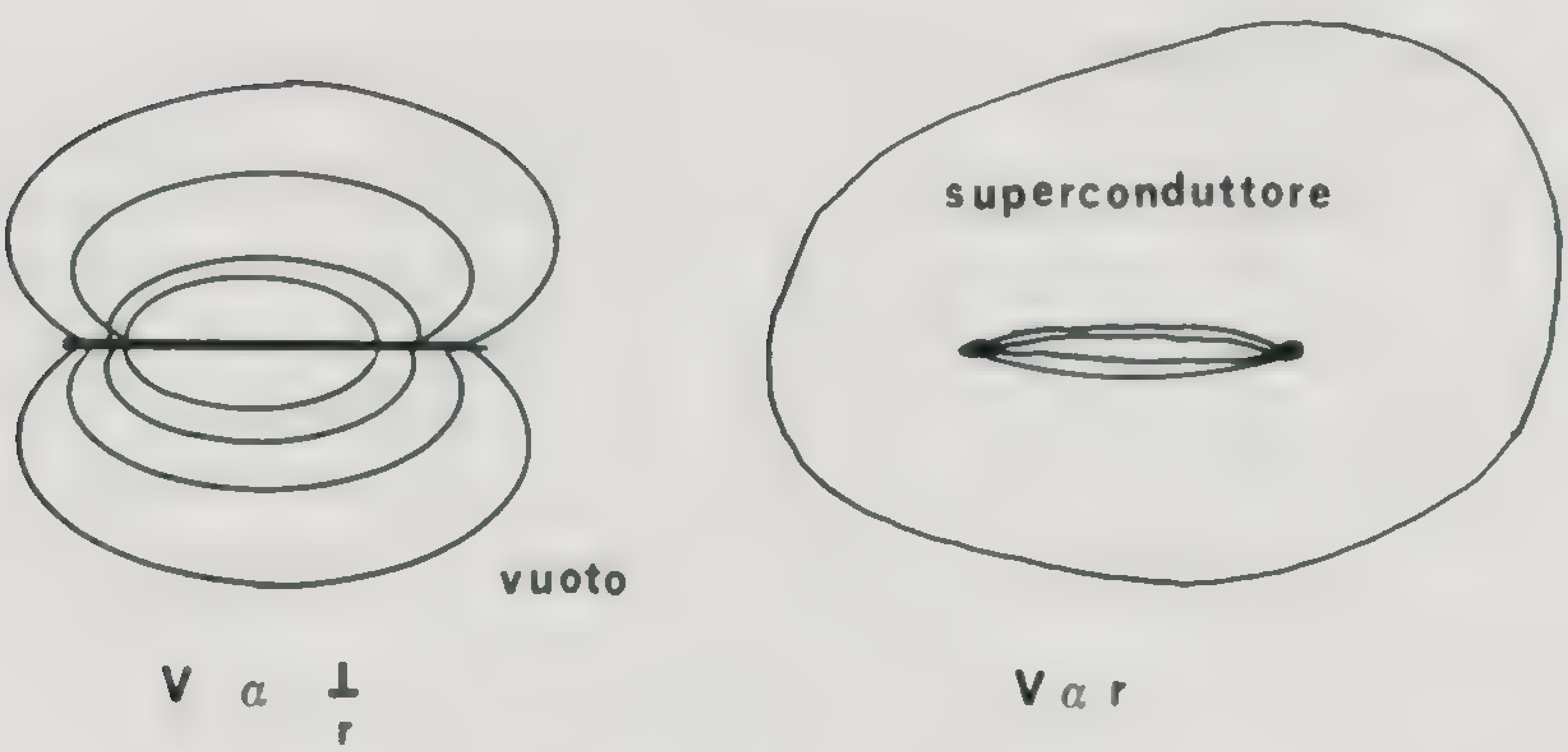


Figura 2

sarebbe legata da un sottile tubo di flusso magnetico e quindi da un potenziale crescente linearmente con la distanza (vedi figura 2).

L'analogia fra tali sistemi statistici e la QCD non è però diretta: i quark sono cariche *elettriche* di colore e non monopoli *magnetici*; inoltre un superconduttore si trova in una fase altamente ordinata, caratterizzata dalla condensazione delle paia di Cooper ($\langle 0|\phi|0\rangle \neq 0$) ed è un classico esempio di realizzazione del fenomeno di Higgs; la QCD invece non si trova nella fase di Higgs che, d'altra parte non confinerebbe cariche elettriche (di colore).

Ci sono invece indizi che la QCD si trovi in una fase di estremo disordine, causato, almeno in parte, dalla presenza di eccitazioni topologiche come istantoni[2] e meroni.[8,9]

Lo studio diretto di questi effetti disordinanti non è finora riuscito a provare il confinamento se non in esempi molto semplificati e irrealistici (QED compatta a 3 dimensioni spazio temporali)[2]; si è riusciti solo a mostrare che il confinamento non è incompatibile con la QCD (per esempio la presenza di istantoni impedisce di usare ingenuamente il gauge di Coulomb e quindi di trattare come fisici i gradi di libertà trasversi dei gluoni).[10,11]

Una via molto promettente per studiare la fase confinante sfruttando appieno l'analogia con la superconduttività è suggerita dalla presenza in molti sistemi dinamici di una trasformazione, detta di dualità, che generalizza la ben nota invarianza delle equazioni di Maxwell per lo scambio $\vec{E} \to \vec{B}$, $\vec{B} \to -\vec{E}$; in generale una trasformazione di dualità scambia il ruolo delle cariche elettriche (cariche locali) con quello dei monopoli (cariche topologiche, quindi eccitazioni collettive) e corrispondentemente il ruolo di ordine e disordine.[12,13,14,15] Esistono cioè due diverse teorie che descrivono lo stesso sistema di cui una e più adatta a descriverne il comportamento a bassa temperatura (o piccola costante d'accoppiamento) e l'altra quello ad alta temperatura (o grande costante d'accoppiamento). La teoria di gauge è adatta per la descrizione del sistema gluonico a bassa temperatura; sarebbe chiaramente importante trovare qual è la teoria adatta a descrivere il sistema gluonico ad alta temperatura per avere una comprensione migliore della fase disordinata.

Prima di affrontare questo problema conviene analizzare quel che succede nei sistemi di spin, sistemi notevolmente più semplici, ma che hanno molte caratteristiche in comune con la teoria di gauge.

Un generico sistema di spin possiede in generale due fasi. Nella fase a bassa temperatura esiste una magnetizzazione spontanea che indica che gli spin sono in maggioranza orientati lungo una direzione privilegiata; se si aumenta la temperatura il sistema si disordina sempre più finché al disopra della temperatura di Curie non esiste più alcuna direzione preferenziale e c'è una completa restaurazione della simmetria rotazionale.

In teoria dei campi i modelli che corrispondono a sistemi di spin a *bassa temperatura* sono i modelli chirali tra cui il più noto è il modello σ non lineare di Gell Mann e Levy, descritto dalla densità di Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2 g_0^2} (\partial_\mu \sigma \, \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi}) \tag{1}$$

con il vincolo:

$$\sigma^2 + \vec{\pi}^2 = 1 \tag{2}$$

Classicamente, la simmetria chirale $0(4) \sim 0(3) \times 0(3)$ della Lagrangiana è spontaneamente rotta, poiché il vincolo impedisce che i campi σ, $\vec{\pi}$ siano tutti contemporaneamente piccoli. Si stabilisce quindi una direzione privilegiata: un campo, diciamo il σ, acquista un valore d'aspettazione nel vuoto diverso da zero, giocando il ruolo di magnetizzazione spontanea, gli altri campi, i $\vec{\pi}$, descrivono particelle di Goldstone di massa nulla, in corrispondenza ai generatori della simmetria rotta.

Ad alta temperatura la descrizione classica fornita dal modello σ non è più adeguata poiché la simmetria $0(4)$ non è rotta; il sistema statistico è semplicemente rappresentato da una ordinaria teoria ϕ^4, con ϕ vettore di $0(4)$, che, classicamente, descrive un multipletto di 4 particelle massive.

Sottolineiamo che questi due modelli (il σ non lineare e il ϕ^4), che classicamente corrispondono a due teorie diverse, quantisticamente non sono che due descrizioni dello stesso sistema fisico in due fasi diverse.

Il ruolo degli effetti quantistici è particolarmente evidente per il modello σ non lineare nello spazio tempo bidimensionale.

Un teorema enunciato già dal 1930 da Bloch[16], dimostrato rigorosamente nel 1966 da Mermin e Wagner[17] e introdotto in

teoria di campi da Coleman[18] asserisce che in un sistema con una simmetria globale continua in dimensioni $d \leqslant 2$ non ci può essere rottura spontanea. Perciò nei modelli chirali in due dimensioni le fluttuazioni quantistiche hanno un effetto disordinante che restaura la simmetria chirale anche per valori infinitamente piccoli della costante di accoppiamento.

In due dimensioni i modelli chirali sono rinormalizzabili e asintoticamente liberi. Utilizzando la regolarizzazione dimensionale si può costruire uno sviluppo perturbativo della teoria in $2+\epsilon$ dimensioni. Si trova che il sistema subisce una transizione della fase ordinata alla fase simmetrica per $g^2 = 0(\epsilon)$. Un parametro d'ordine che descrive questa transizione è

$$\lim_{|x-y|\to\infty} \langle 0| \left(\sigma(x)\,\sigma(y) + \vec{\pi}(x)\cdot\vec{\pi}(y)\right)|0\rangle \tag{3}$$

che è più conveniente scrivere nella forma:

$$\lim_{|x-y|\to\infty} \langle tr\, g^{-1}(x)\, g(y)\rangle$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} \sigma + i\pi_3 & \pi^+ \\ \pi^- & \sigma - i\pi_3 \end{pmatrix} = \sigma\, 1 + \vec{\pi}\cdot\vec{\sigma} \in SU(2) \tag{4}$$

Nella variabile g la Lagrangiana diventa $\frac{1}{2g_0^2}\, tr(g^{-1}\partial_\mu g\, g^{-1}\,\partial^\mu g)$, che è generalizzabile a qualsiasi gruppo semplice compatto G, $(g \in G)$, con l'invarianza chirale $G \times G$: $g \to hgk \;\forall\; h \in G,\, k \in G$.

Questa funzione di correlazione è un invariante chirale, ma nel limite $|x-y| \to \infty$ si fattorizza, utilizzando la "cluster decomposition", in quantità non invarianti

$$\lim_{|x-y|\to\infty} \langle tr\, g^{-1}(x)\, g(y)\rangle \propto tr\langle g\rangle^2 = \langle q^a\rangle\langle q^a\rangle,\quad q^a = (\sigma, \vec{\pi}). \tag{5}$$

Perciò nella fase simmetrica questa funzione di correlazione deve tendere a zero. Inoltre, come vedremo in seguito, questa funzione tende a zero esponenzialmente, segnalando così la presenza di una particella massiva nella fase simmetrica. In più di due dimensioni questa fase non si può descrivere con le teorie chirali che non sono rinormalizzabili per $d > 2$.

Per descrivere la fase simmetrica dei modelli di spin si deve quindi

usare come punto di partenza la teoria ϕ^4, in cui la simmetria chirale è realizzata linearmente e lo spettro fisico è formato da multipletti chirali massivi. Questi modelli sono particolarmente semplici in 4 dimensioni dove la teoria di Landau del campo medio dà una corretta descrizione della transizione dalla fase simmetrica alla fase con rottura spontanea. In questo caso si può costruire uno sviluppo in $4-\epsilon$ dimensioni attorno alla regione di transizione ottenendo una valutazione degli esponenti critici in accordo con l'analogo sviluppo in $2+\epsilon$ dimensioni dei modelli chirali.

Esiste un'analogia molto pronunciata tra i modelli di spin in due dimensioni e le teorie di gauge in 4 dimensioni. Entrambi sono asintoticamente liberi, entrambi hanno eccitazioni topologiche come vortici non abeliani (nei modelli chirali) e istantoni (nei modelli CP^{n-1});[19,20] in entrambi il vuoto perturbativo non è il vero vuoto: in due dimensioni non si possono avere particelle di Goldstone come presumibilmente in 4 dimensioni non si possono avere gluoni reali. Infine Migdal ha trovato delle relazioni di ricorrenza approssimate per il gruppo di rinormalizzazione della teoria di gauge in quattro dimensioni associata a un gruppo non abeliano G che sono identiche a quelle del modello bidimensionale con simmetria chirale $G \times G$. Nella tavola seguente riportiamo i principali punti di corrispondenza di queste due teorie.

TAVOLA

• modelli di spin bidimensionali	• teorie di gauge in 4 dimensioni
• simmetria chirale $G \times G$	• simmetria di gauge G
• rinormalizzabilità e	• rinormalizzabilità e
• libertà asintotica	• libertà asintotica
• sviluppo in $2+\epsilon$ dimensioni	• sviluppo in $4+\epsilon$ dimensioni
• particelle di Goldstone in $2+\epsilon$ dimensioni a bassa temperatura	• gluoni reali in $4+\epsilon$ dimensioni per g piccolo
• transizione di fase a $g^2 = 0(\epsilon)$	• transizione di fase a $g^2 = 0(\epsilon)$

• parametro d'ordine invariante chirale $\langle tr g(x) g^{-1}(y) \rangle$	• parametro d'ordine invariante di gauge: loop di Wilson $\langle tr P \exp \oint A_\mu dx^\mu \rangle$
• restaurazione della simmetria chirale	• confinamento dei quark massivi
• modello ϕ^4 per la fase simmetrica	?

Per completare l'ultima riga della tavola conviene analizzare un altro tipo di sviluppo che in un certo senso è complementare allo sviluppo in ϵ ed è fondato nell'immergere la teoria di campo in un reticolo cristallino anziché nello spazio-tempo ordinario.(1)

Per esempio una configurazione del modello chirale su reticolo (cubico) è definita assegnando ad ogni nodo reticolare i un elemento g_i del gruppo G. La funzione di partizione di questo sistema è:

$$Z(g_B) = \prod_i \int dg_i \, e^{\frac{1}{g_B^2} \sum_{\langle i,j \rangle} tr(g_i g_j^{-1}) + c.c.} \tag{6}$$

dove dg è la misura invariante del gruppo e la somma $\Sigma_{\langle i,j \rangle}$ è estesa a tutte le coppie di nodi vicini, o legami, del reticolo. Similmente ogni configurazione di una teoria di gauge su reticolo è definita assegnando ad ogni legame l del reticolo un elemento g_l del gruppo, e la funzione di partizione è:

$$Z(g_B) = \prod_l \int dg_l \, e^{\frac{1}{g_B^2} \Sigma_q \, tr(g_{l_1} g_{l_2} g_{l_3} g_{l_4}) + c.c.} \tag{7}$$

dove la somma Σ_q è estesa a tutti i quadrati elementari del reticolo (plaquettes). Se si fa tendere a zero il passo reticolare (con g_B fisso) entrambe le teorie tendono alle rispettive teorie sul continuo.

Si ha motivo di ritenere che le teorie di campo su reticolo siano una forma regolarizzata delle teorie sul continuo dove il passo reticolare funziona da taglio ultravioletto anche se; in realtà, non esiste una prova completa di questa asserzione. Uno dei maggiori vantaggi della formulazione su reticolo è che compaiono nell'azione gli elementi

finiti del gruppo anziché gli elementi infinitesimi. Si può allora fare un'analisi armonica della misura $e^{\frac{1}{g_B^2} tr(g)}$ in termini dei caratteri delle varie rappresentazioni di G:

$$e^{\frac{1}{g_B^2} tr(g)} = N(1 + \Sigma_\nu \, C_\nu \, (g_B^2) \, \mathcal{X}_\nu (g)) \tag{8}$$

dove ν indica una rappresentazione irriducibile di G, N è un fattore di normalizzazione e g è l'elemento associato ai legami nelle teorie chirali o ai quadrati elementari nelle teorie di gauge. Utilizzando le proprietà di ortonormalità dei caratteri:

$$\int dg \, \mathcal{X}_\nu \, (ag) \, \overset{*}{\mathcal{X}}_\mu (bg) = \frac{1}{d(\nu)} \, \delta_{\mu\nu} \quad \mathcal{X}_\nu (ab^{-1}) \tag{9}$$

si possono eseguire direttamente le integrazioni sulle variabili di gruppo cosicché la teoria viene espressa in termini delle componenti armoniche C_ν. In queste variabili le funzioni di partizione assumono un aspetto diverso. Nelle teorie chirali le eccitazioni del sistema sono poligoni di legami; ad ogni legame è associata una rappresentazione ν e le maniere in cui questi poligoni si intersecano dipendono dal gruppo G.

Analogamente le eccitazioni delle teorie di gauge sono delle superfici chiuse in cui ad ogni quadrato elementare è associata la rappresentazione ν e contribuisce con un fattore C_ν alla funzione di partizione; il tipo di interazione tra queste eccitazioni dipende da G.[(21)] Le componenti armoniche C_ν hanno una forma particolarmente semplice nel limite di accoppiamento forte: per la rappresentazione fondamentale si ha:

$$C_1 \, \alpha \, \frac{1}{g_B^2} \tag{10}$$

mentre per le altre compaiono potenze superiori di $1/g_B^2$. Quindi lo sviluppo in componenti armoniche è in realtà uno sviluppo perturbativo in $1/g_B^2$. In questo senso questo sviluppo è complementare allo sviluppo in ϵ: il sistema dinamico è sviluppato direttamente nella regione ad alta temperatura, inaccessibile allo sviluppo in ϵ.

In questo sviluppo è immediato calcolare il termine dominante delle funzioni di Green invarianti chirali o di gauge. Per esempio si

vede che al valore di aspettazione di $g^{-1}(0)\,g(l)$ contribuiscono tutte le linee che connettono 0 a l. Il contributo dominante è dato dalla linea più breve ed è

$$\langle g^{-1}(0)\,g(l)\rangle = c_1^{\,l} \tag{11}$$

Questa relazione mostra che nella fase ad alta temperatura il modello chirale contiene una particella di massa $m=-\log c_1$. E' inoltre possibile costruire una azione effettiva direttamente in termini di queste eccitazioni: in questo schema l'eq. (11) rappresenta il contributo all'azione di una particella libera di massa m:

$$\langle g^{-1}(0)g(l)\rangle = e^{-S} = e^{-ml} \tag{12}$$

Analogamente nelle teorie di gauge il valore di aspettazione del parametro d'ordine (loop di Wilson) per un rettangolo $R\times T$ è, nel limite $\frac{1}{g_B^2}\to 0$

$$\langle W_{R\times T}\rangle = c_1^{RT} \tag{13}$$

In analogia all'eq. (12) quesa relazione si può interpretare come il contributo all'azione di un sistema esteso di lunghezza R del tutto simile alle corde dei modelli duali

$$\langle W_{R\times T}\rangle = e^{-S} = e^{-\frac{1}{2\pi\alpha'}\,(\text{Area minima})} \tag{14}$$

La tensione di queste corde è universale:

$$\frac{1}{2\pi\alpha'} = -\log c_1 \tag{15}$$

Queste eccitazioni sono responsabili del confinamento dei quarks statici in quanto si possono interpretare come tubi di flusso quantizzati che convogliano tutto il colore uscente da un quark al suo partner, proprio come i vortici di Abrikosov convogliano tutto il flusso magnetico di una coppia di monopoli.

Queste considerazioni ci inducono a ritenere che la teoria più adatta a descrivere la fase confinante della teoria di gauge è probabilmente una teoria di corde molto simile ai modelli duali.[22] In questa linea di pensiero si inseriscono alcuni tentativi molto pro-

mettenti di costruire una azione effettiva per la fase disordinata della teoria di gauge utilizzando come campi fondamentali i loops di Wilson. In particolare Makeenko e Migdal [23,24] hanno scritto delle interessanti equazioni per il valore di aspettazione del loop di Wilson, valide per un gruppo di gauge $SU(N)$ per $N \to \infty$, che stabiliscono un legame tra questa problematica e un altro tipo di sviluppo della teoria di gauge in cui si intravede di nuovo un'analogia con il modello duale. Questo sviluppo è basato sulla considerazione che nelle teorie di gauge $SU(N)$ nello spazio tempo ordinario l'unico parametro piccolo che compare nella teoria è $\frac{1}{N}$. Effettivamente nel limite $N \to \infty$ la teoria si semplifica notevolmente in quanto sopravvivono solo i diagrammi di Feynman planari che sono, come è noto, il punto di partenza per la costruzione di modelli duali.

BIBLIOGRAFIA

(1) K. G. Wilson, *Phys. Rev.* **D10**, 2445 (1974).
(2) A. M. Polyakov, *Phys. Lett.* **B59**, 79, 82 (1975).
(3) A. A. Migdal, *JETP* **42**, 413, 743 (1975).
(4) P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A133**, 60 (1931).
(5) H. B. Nielsen and P. Olesen, *Nucl. Phys.* **B61**, 45 (1973).
(6) Y. Nambu, *Phys. Rev.* **D10**, 4262 (1974).
(7) G. Parisi, *Phys. Rev.* **D11**, 970 (1975).
(8) V. de Alfaro, S. Fubini and G. Furlan, *Phys. Lett.* **65B**, 163 (1976).
(9) C. Callan, R. Dashen and D. Gross, *Phys. Lett.* **66B**, 375 (1977).
(10) V. N. Gribov, *Nucl. Phys.* **B139**, 1 (1978).
(11) S. Sciuto, *Phys. Lett.* **71B**, 129 (1978).
(12) H. A. Kramers and G. H. Wannier, *Phys. Rev.* **60**, 252 (1949).
(13) S. Coleman, *Phys. Rev.* **D11**, 2088 (1975).
(14) S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **D11**, 3026 (1975).
(15) R. Savit, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 453 (1980).
(16) F. Bloch, *Z. Phys.* **61**, 206 (1930).
(17) N. D. Mermin and H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 1133 (1966).
(18) S. Coleman, *Commun. Math. Phys.* **31**, 259 (1973).

(19) H. Eichenherr, *Nucl. Phys.* **B146**, 223 (1978);
V. Golo and A. Peremolov, *Phys. Lett.* **79B**, 112 (1978).
(20) A. D'Adda, M. Lüscher and P. Di Vecchia, *Nucl. Phys.* **B146**, 63 (1978).
(21) F. Gliozzi and M. A. Virasoro, *Nucl. Phys.* **B164**, 141 (1980).
(22) F. Gliozzi, T. Regge and M. A. Virasoro, *Phys. Lett.* **81B**, 178 (1979).
(23) Yu. M. Makeenko and A. A. Migdal, *Phys. Lett.* **88B**, 135 (1979).
(24) A. A. Migdal, *Phys. Lett.* **96B**, 333 (1980).
(25) G. 'tHooft, *Nucl. Phys.* **B72,** 461 (1974).

Teorie di gauge e meccanica statistica

*Claudio Rebbi**

Dedico questo lavoro al caro maestro e amico Mario Verde, nell'occasione del suo sessantesimo compleanno, ricordando con gratitudine il suo insegnamento.

Le teorie di gauge svolgono un ruolo fondamentale nella descrizione contemporanea delle interazioni fra particelle. Le previsioni teoriche reggono molto bene il confronto con i dati sperimentali, ogni qualvolta delle opportune tecniche matematiche ne permettono la formulazione. Questo si verifica quando i fenomeni considerati sono governati da una costante di accoppiamento debole, in cui è possibile effettuare uno sviluppo perturbativo. Vi sono però questioni molto importanti, di cui il problema del confinamento dei quark costituisce esempio, la cui soluzione non può essere ricondotta ad un trattamento di costante debole. Una tecnica molto efficace per l'analisi di tali problemi consiste nel formulare la teoria di gauge su un reticolo spazio-temporale[(1)], nell'approssimare cioè il continuo dello spazio tempo con un insieme discreto di punti. Con ciò vengono ovviamente regolarizzate le divergenze ultraviolette che si manifestano nelle teorie quantistiche di campo, ma, soprattutto, diviene possibile uno sviluppo in potenze inverse della costante d'accoppiamento, uno sviluppo cioè di costante forte. Una volta definita la teoria quantistica nello spazio-tempo discreto, la teoria nel continuo verrà ottenuta mediante un opportuno passaggio al limite.

Ogni teoria di campo può, in linea di principio, venir riformulata in uno spazio-tempo discreto: basta sostituire alle derivate parziali degli operatori di differenza finita. Per una teoria di gauge, tuttavia, la formulazione sul reticolo si effettua in modo ancor più naturale. E' utile ricordare che il potenziale di gauge, $A^{\alpha}_{\mu}(x)$ specifica una rotazione del sistema di riferimento in un certo spazio intrinseco al pas-

* C.E.R.N. - Ginevra - Scuola di Specializzazione in Fisica Nucleare - Università di Torino. In congedo dal Dipartimento di Fisica del Laboratorio Nazionale di Brookhaven, U.S.A.

saggio tra due punti a distanza infinitesima, x^μ e $x^\mu + dx^\mu$. La rotazione è data da

$$U = e^{ig A_\mu^a \tau_a dx^\mu} \tag{1}$$

dove g è la costante di accoppiamento, τ_a sono le matrici che rappresentano i generatori infinitesimi del gruppo e, qui come nel seguito, si sottointende una somma sugli indici ripetuti. Se anziché consistere di un insieme continuo di punti lo spazio-tempo è costituito dai vertici di un reticolo, occorrerà specificare le rotazioni lungo gli spostamenti (orientati) tra vertici contigui. Denotando questi ultimi con gli indici i e j, le variabili dinamiche saranno elementi

$$U_{ij} = U_{ij}^{-1} \tag{2}$$

appartenenti al gruppo di gauge G. Si noti che U_{ij} sarà in ogni caso un elemento finito (e non una rotazione infinitesima) del gruppo di gauge, poiché caratterizza la rotazione lungo uno spostamento finito. Non è quindi più necessario che G sia un gruppo di Lie e sul reticolo si possono definire sistemi di gauge pure con gruppo di gauge finito. Le trasformazioni di gauge corrispondono a rotazioni locali G_i del sistema di riferimento nei vari vertici i del reticolo. La legge di trasformazione degli U_{ij} è quindi:

$$U_{ij} \to U'_{ij} = G_i^{-1} U_{ij} G_j \ . \tag{3}$$

Un metodo conveniente per definire una teoria quantistica di campo consiste nel rappresentare i valori di aspettazione degli operatori come medie su tutte le possibili configurazioni del campo, con un fattore di peso dato da $e^{-\frac{i}{\hbar}S}$, dove S è l'azione del sistema. Inoltre, è utile eseguire una rotazione di Wick, $t \to it$, in modo da tendere lo spazio-tempo euclideo e la funzione di peso definita positiva: $e^{-\frac{i}{\hbar}S} \to e^{-\frac{1}{\hbar}S}$. Le funzioni di Green verranno poi continuate dallo spazio-tempo euclideo a quello di Minkowski.

Normalmente lo spazio-tempo (euclideo dopo la rotazione di Wick) è reso discreto introducendo un reticolo ipercubico, la cui distanza interreticolare denoteremo con a. Per definire l'azione S notiamo che, nel continuo, questo funzionale prende la forma

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x \ \ F_{\mu\nu}^a \ F_a^{\mu\nu} \tag{4}$$

dove il tensore di campo, dato da

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A_{\mu b} A_{\nu c} \ , \tag{5}$$

(f^{abc} sono le costanti di struttura del gruppo) rappresenta la rotazione del sistema di riferimento in un circuito infinitesimo di lati dx^μ e dx^ν. Geometricamente, $F^a_{\mu\nu}$ misura la curvatura della connessione nello spazio intrinseco data da A^a_μ.

Generalizzando tale concetto, consideriamo un quadrato elementare del reticolo, o "plaquette", formato dai vertici i_1, i_2, i_3 e i_4 e costruiamo il prodotto

$$U_\square = U_{i_1 i_2} \, U_{i_2 i_3} \, U_{i_3 i_4} \, U_{i_4 i_1} \tag{6}$$

che rappresenta la rotazione del sistema di riferimento intrinseco nel trasporto parallelo attorno alla plaquette. In una trasformazione di gauge (cfr. Eq. 3)

$$U_\square \to U_\square = G^{-1}_{i_1} U \, G_{i_1} \ . \tag{7}$$

Associamo quindi alla plaquette una quantità gauge invariante considerando una funzione di $U_\square$ invariante per trasformazioni di similitudine

$$f(G^{-1} \, U_\square G) = f(U_\square) \ . \tag{8}$$

L'azione verrà definita sommando su tutte le plaquette il valore assunto da una funzione $f(U_\square)$ opportuna.

Vi è una notevole arbitrarietà nella scelta della funzione f. Il requisito fondamentale è che sviluppando tale funzione nell'intorno della identità si ottenga una forma quadratica che riproduca l'espressione (4) nel passaggio al limite continuo. Si può far vedere che, una volta soddisfatta tale condizione nonché alcuni requisiti di convessità, qualsiasi scelta della funzione f darà origine alla stessa teoria nel limite del continuo. In tutti i modelli che considereremo, il gruppo di gauge si potrà considerare un sottogruppo di $SU(2)$. Rappresentando un generico elemento di $SU(2)$ come

$$U = \cos\phi + i\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \sin\phi \ , \tag{9}$$

dove σ sono le matrici di Pauli ed $\vec{n}$ è un versore di direzione, sceglieremo come funzione f (per tutti i sistemi analizzati)

$$f(U) = \frac{4}{g^2}(1 - \cos\phi_\square) \equiv \beta(1 - \cos\phi_\square) \ . \tag{10}$$

g è la costante di accoppiamento della teoria e $\beta\,(\equiv \frac{4}{g^2})$ è un parametro che verrà convenientemente usato al posto di g per caratterizzare la forza dell'interazione. L'azione sarà quindi data da

$$S = \Sigma_\square \; \beta(1 - \cos \phi_\square)\,. \tag{11}$$

Con un po' di algebra si può verificare facilmente che ponendo

$$U_{ij} = e^{\,iagA^a_\mu(x)\,\sigma_a/2} \tag{12}$$

(dove x rappresenta la coordinata del vertice i, μ la direzione ij ed a, lo ricordiamo, è il passo reticolare) al limite $a \to o$ l'espressione (11) si riduce all'azione per la teoria nel continuo, data dall'eq. (4). Tale fatto non basta, tuttavia, a dimostrare che la teoria quantistica definita sul reticolo darà origine ad una teoria quantistica nello spazio-tempo continuo al limite $a \to o$. Il passaggio al limite continuo deve essere accompagnato da una rinormalizzazione della costante di accoppiamento. Sul reticolo, infatti, il valore di aspettazione di una qualsiasi osservabile $0\,(U_{ij})$ sarà dato da (in unità con cui $\hbar = 1$)

$$\langle 0 \rangle = \frac{\int \Pi dU_{ij}\; 0(U_{ij})\, e^{-S(U_{ij},\, g)}}{Z}\,, \tag{13}$$

dove

$$Z = \int \Pi dU_{ij}\; e^{-S(U_{ij},\, g)} \tag{14}$$

è la funzione di partizione del sistema, o ampiezza di permanenza del vuoto. (Gli integrali $\int dU_{ij}$ vanno intesi come integrali invarianti sul gruppo, se questo è continuo, o semplicemente come somme su tutti gli elementi, se il gruppo è discreto). Consideriamo ora una grandezza fisica ben definita, come potrebbe essere la lunghezza di correlazione l tra due osservabili. l risulterà data da una formula

$$l = a\, \lambda(g)\,, \tag{15}$$

dove a è il passo del reticolo e la funzione priva di dimensioni $\lambda(g)$ esprime il valore della lunghezza di correlazione come numero di passi reticolari. Per definire un limite continuo ovviamente non basta mandare a a zero, ma occorre riaggiustare allo stesso tempo la costan-

te di accoppiamento in modo che la funzione $\lambda(g)$ tenda all'infinito come $1/a$. Nel limite del continuo, cioè, la correlazione deve estendersi su un numero sempre maggiore di passi reticolari, in modo che la lunghezza fisica, $l=a\lambda$, mantenga un valore costante: solo così l'aspetto granulare introdotto dal reticolo scompare e la teoria risulta ben definita in uno spazio-tempo continuo.

Da questa discussione risulta chiaro che si può passare al limite continuo solo se la teoria definita sul reticolo possiede un punto critico, se esiste cioè un valore g_0 (eventualmente uguale a zero) per cui

$$\lim_{g \to g_0} \lambda(g) = \infty \ . \tag{16}$$

Allora l'equazione (15) si può risolvere, ottenendo una funzione

$$a(g) = \frac{l}{\lambda(g)} , \tag{17}$$

(in cui l è considerato un parametro costante), che stabilisce una relazione tra il passo reticolare e la costante di accoppiamento. Per definire il limite continuo, cioè, la costante di accoppiamento va rinormalizzata in modo tale che la grandezza fisica l mantenga valore costante quando il passo reticolare a tende a zero. l viene così a definire la scala delle lunghezze. Se si calcola un'altra quantità osservabile, per esempio un'ulteriore lunghezza l_1, questa sarà data da una formula analoga all'Eq. (15):

$$l_1 = a\,\lambda_1(g) \ . \tag{18}$$

Allora, al limite $g \to g_0$, il rapporto $\lambda_1(g)/\lambda(g)$ deve tendere ad una costante:

$$\lim_{g \to g_0} \frac{\lambda_1(g)}{\lambda(g)} = c \ . \tag{19}$$

Tale costante esprime la misura della lunghezza l_1 in unità di l nella teoria del continuo: ogni traccia del reticolo è scomparsa dalla relazine $l_1 = cl$.

Riassumendo, partendo dalla teoria quantistica definita sul reticolo si potrà passare al limite dello spazio-tempo continuo se esiste un punto critico g_0 con le proprietà espresse dalle equazioni (16) e (19).

Le equazioni (13) e (14) mettono in risalto la notevole analogia

tra la formulazione sul reticolo di una teoria quantistica di campo ed i problemi di meccanica statistica. Le medie che definiscono i valori di aspettazione delle osservabili sono dello stesso tipo di quelle che definiscono i valori delle funzioni termodinamiche in un sistema cristallino, unica differenza il fatto che nel caso della teoria di campo il reticolo è un'entità a quattro anziché a tre dimensioni. Il parametro $\beta = \frac{4}{g^2}$, che nelle teorie di gauge regola la forza dell'interazione (vedi Eq. (11)), svolge lo stesso ruolo del fattore 1/kT in termodinamica. In particolare, valori molto grandi di β corrispondono ad un limite in cui le fluttuazioni quantomeccaniche (rispettivamente termiche) sono fortemente soppresse, ad un regime, cioè, di costante d'accoppiamento debole (o di bassa temperatura). Nel limite opposto, $\beta \to 0$, invece il fattore e^{-S} (corrispondente al fattore di Boltzmann $e^{-E/kT}$) rimane prossimo all'unità e moltissime configurazioni intervengono nella formulazione delle medie quantomeccaniche: le fluttuazioni sono elevate; si è in un regime di costante di accoppiamento forte (o alta temperatura). I punti critici che servono a definire il limite dello spazio-tempo continuo corrispondono, in questa analogia, ai punti critici di ordine superiore al primo di un sistema termodinamico, dove avviene una transizione di fase con lunghezza di correlazione infinita. Risulta chiaro quindi che analizzare la struttura delle fasi di questi sistemi termodinamici quadridimensionali costituisce la premessa indispensabile per determinare se la teoria possiederà un limite continuo e quali ne saranno le proprietà fisiche. Per esempio, è auspicabile che una teoria avente per gruppo di gauge il gruppo abeliano $U(1)$ ammetta un limite continuo in cui il campo si riduce al campo di Maxwell quantizzato, visto che il potenziale elettromagnetico $A_\mu(x)$ rappresenta proprio le rotazioni infinitesime di fase (gruppo $U(1)$) nei trasporti tra punti vicini. D'altra parte è possibile dimostrare che, per qualsiasi teoria di gauge formulata sul reticolo, nel limite di costante forte il potenziale tra due sorgenti che trasformino come la rappresentazione fondamentale del gruppo ha caratteristiche confinanti, cresce cioè oltre ogni limite quando la separazione tra le sorgenti tende all'infinito. Tale fatto è una conseguenza delle forti fluttuazioni del campo di gauge, che impediscono la propagazione di una carica isolata. Se il gruppo di gauge è $U(1)$, questo significa che le cariche elettriche sono confinate sul reticolo per altri valori di

g (ossia piccolo β): ci si aspetta quindi l'esistenza di un punto critico che separi la fase confinante da un'altra fase, in cui il potenziale tra due cariche assuma un aspetto coulombiano e che sarebbe, naturalmente, la fase entro cui si deve procedere per definire il limite continuo. Se invece il gruppo di gauge è un gruppo di Lie non abeliano, coerentemente con le congetture che stanno alla base dei modelli per le interazioni forti tra quark, si vorrebbe che non vi sia alcuna transizione di fase: le caratteristiche confinanti della teoria per piccolo β permarrebbero così nel limite $\beta \to \infty$, che verrebbe ora a definire il punto critico necessario al passaggio al continuo. Una struttura siffatta può spiegare tanto il confinamento dei quark a grandi distanze, quanto il loro comportamento quasi libero a piccola separazione (libertà asintotica), che è ricondotto al fatto che il valore critico di g è zero. In effetti, se g critico è zero, la forma asintotica della relazione tra passo reticolare a e costante non rinormalizzata g (vedi Eq. (17)) si può determinare con argomenti di natura perturbativa, ed è solo la costante di proporzionalità che non si può valutare perturbativamente.

I due limiti, $\beta \to \infty$ e $\beta \to 0$, si prestano entrambi a sviluppi analitici: la normale serie perturbativa per $\beta \to \infty$ $(g \to 0)$, oppure uno sviluppo di costante forte per $\beta \to 0$. Il problema notevole è, però, se e come i due sviluppi si connettano, il problema, cioè, di ottenere informazione sul comportamento del sistema per valori intermedi della costante di accoppiamento. In meccanica statistica si è visto, già da tempo, che certi metodi numerici, basati su simulazioni dinamiche, possono produrre risultati accurati sulle proprietà dei sistemi per un intervallo esteso di valori di β, spesso sufficiente a connettere i due regimi estremi. Tali metodi vanno sotto il nome di simulazioni Monte Carlo e consistono nel generare, mediante un calcolatore, una sequenza markoviana di configurazioni del sistema, in modo tale che, raggiunto l'equilibrio, la probabilità di incontrare una data configurazione Σ sia proporzionale al fattore $e^{-S(\Sigma)}$, dove $S(\Sigma)$ è appunto l'azione del sistema in tale configurazione. Allora, le medie quantomeccaniche esatte:

$$\langle 0 \rangle = \frac{\int \Pi \, dU_{ij} \, 0(U_{ij}) \, e^{-S(U_{ij},\, g)}}{Z} \qquad (13)$$

possono venir approssimate mediante medie sui valori che l'osservabi-

le assume nelle varie configurazioni della sequenza

$$\langle 0 \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{i=i_0}^{i_0+N-1} 0(\Sigma_i) \tag{20}$$

Anche se l'applicazione del metodo varia nei dettagli, la prassi comune per passare da Σ_i a Σ_{i+1} (che può coincidere con Σ_i) consiste nel considerare una delle variabili dinamiche U_{ij}, proporne un nuovo valore U'_{ij} (il che, come tutte le altre operazioni, è fatto da un calcolatore a grande velocità e con l'impiego di algoritmi che generano numeri pseudocasuali), valutare la variazione d'azione ΔS (procedimento generalmente semplice data la natura locale dell'azione) ed accettare o rifiutare il cambio a seconda del valore di ΔS. Nella formulazione proposta originariamente[2], il cambio è sempre accettato se l'azione diminuisce, ma può essere accettato con probabilità condizionale $e^{-\Delta S}$ anche se ΔS aumenta (in un calcolo classico, anziché quantistico, solo $\Delta S < 0$ sarebbe accettabile).

Le simulazioni di tipo Monte Carlo, che, come si diceva, sono state utilizzate con profitto per studiare sistemi termodinamici, sono state estese, di recente, anche alle teorie di campo[3 ÷ 8][1]. La difficoltà di questa generalizzazione consiste naturalmente nel fatto che il sistema è ora quadridimensionale ed anche una modesta estensione lineare comporta un numero estremamente elevato di variabili dinamiche (un reticolo che abbia un lato di 8 siti, per esempio, contiene $4 \times 8^4 = 16384$ variabili U_{ij}). Il tempo necessario anche ad un calcolatore veloce per l'analisi ed eventuale modifica di tutte le variabili dinamiche diviene lungo ed inoltre sono spesso necessarie molte scansioni dell'intero reticolo per determinare valori medi sufficientemente accurati. D'altronde, la dimensionalità elevata sembra agevolare l'esperimento numerico e si è constatato che la simulazione di sistemi quadridimensionali di estensione lineare limitata (8, 6 o talora anche 4 siti per direzione) produce spesso risultati comparabili a quelli che si possono ottenere soltanto simulando sistemi più estesi in due o tre dimensioni.

Una rassegna, anche limitata agli aspetti più salienti, di tutta l'informazione che le simulazioni Monte Carlo hanno permesso di otte-

---

[1] Gli articoli pubblicati sull'argomento, specie nell'ultimo periodo, sono molto numerosi e la bibliografia (3 ÷ 8) è limitata ad alcuni tra i primi lavori apparsi.

nere sulle teorie di gauge richiederebbe ben più tempo di quanto disponga e mi limiterò ad illustrare alcuni dei risultati ottenuti in ricerche cui ho preso parte.

Una delle più semplici, ma allo stesso tempo più informative analisi che si possono eseguire è quella che potremmo chiamare la simulazione di un ciclo termico. Il parametro $\beta(=\frac{4}{g^2})$ è variato lievemente dopo ogni scansione delle variabili dinamiche. L'equilibrio statistico non è così mai rigorosamente raggiunto, ma il sistema vi è mantenuto vicino. Nell'analogia con un sistema termodinamico ordinario, in cui β diviene il fattore $1/kT$, diremmo che la temperatura del sistema viene variata, ma molto lentamente. Allo stesso tempo si misura il valor medio dell'azione S delle singole plaquette, o meglio, il valor medio della quantità $S_\square/\beta=1-\cos\phi_\square$ (vedi Eq. (11)), che, nell'analogia termodinamica, rappresenta l'energia interna E.

Finché il sistema si mantiene praticamente in equilibrio statistico, la misura produce una funzione univoca $E(\beta)$. Ma nei pressi di una transizione di fase il tempo di rilassamento aumenta, e, come in un vero esperimento, si osservano fenomeni d'isteresi. L'apparizione di cicli di isteresi in queste simulazioni Monte Carlo costituisce quindi il primo segnale di una possibile transizione di fase.

Le figure $1\div6$ illustrano i risultati della simulazione di un ciclo termico per sistemi in cui i gruppi di gauge sono Z_2,Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_8 rispettivamente[(4)]. (Ricordiamo che Z_N è il sottogruppo del gruppo abeliano $U(1)$ in cui le rotazioni di fase sono ristrette ai multipli di $2\pi/N$). Tutti i grafici presentano fenomeni di isteresi, che indicano transizioni di fase. Nel caso dei modelli Z_2, Z_3 e Z_4 la transizione di fase è unica. Ma nei modelli Z_6 e Z_8 (e marginalmente in Z_5) si notano due transizioni, che separano perciò tre fasi distinte. La fase per β piccolo è la fase di costante forte, in cui, come dicevamo, le fluttuazioni quantistiche determinano il confinamento di qualsiasi quanto carico. La simulazione numerica, per inciso, conferma appieno tale confinamento. La prima transizione, per $\beta=\beta_1$, porta ad una fase più ordinata, con interazioni a lungo raggio. La seconda transizione, per $\beta=\beta_2$, porta ad una fase caratteristica del fatto che il gruppo di gauge è discreto ed analoga, in un certo senso, alla fase con magnetizzazione spontanea in un modello di Ising. Dai diagrammi si nota chiaramente che al crescere dell'ordine del gruppo

($Z_6 \to Z_8$) la posizione della prima transizione rimane costante, la seconda recede a $\beta \to \infty$ ($g=0$). Con il gruppo di gauge $U(1)$ (e lo si è visto pure in simulazioni dirette) rimane una singola transizione di fase. E' precisamente la transizione la cui esistenza era stata congetturata e che serve a separare il regime di costante forte, da quello coulombiano entro cui si può passare al limite continuo.

Le simulazioni di cicli termici per sistemi in cui il gruppo di gauge non è abeliano producono risultati decisamente diversi. Nelle figure 7, 8 e 9 sono riprodotti i risultati[7] ottenuti con modelli in cui il gruppo di gauge è, rispettivamente: il gruppo quaternionico Q, formato dalle matrici $\pm I$, $\pm i\vec{\sigma}$ (Fig. 7); il sottogruppo T di $SU(2)$, di ordine 24, formato da quelle matrici che, considerate come rappresentazioni di una rotazione, lasciano invariante il tetraedro (Fig. 8); il sottogruppo 0 di $SU(2)$, con 48 elementi, le cui rotazioni lasciano invariante il cubo o l'ottaedro (Fig. 9). In tutti e tre i diagrammi risulta chiara la presenza di un singolo ciclo d'isteresi, segnale di una transizione di fase che si sposta verso valori via via crescenti di β al crescere dell'ordine del gruppo. Il confronto delle figure 6 e 9 è particolarmente interessante. Nei gruppi Z_8 ed 0 (che contiene Z_8 come sottogruppo abeliano massimale) il salto d'azione tra il valore minimale di $S_\Box$ e quello corrispondente al più basso livello di eccitazione è lo stesso. I valori di β per cui si verifica la transizione di fase determinata dalla natura discreta del gruppo sono, corrispondentemente, molto simili. Ma laddove il sistema con gruppo abeliano presenta un'altra transizione di fase, ad un valore intermedio di β ed approssimativamente indipendente dall'ordine del gruppo (per grande N), non si nota invece alcuna transizione a β intermedio nel sistema non abeliano.

La congettura che un sistema con gruppo di gauge $SU(2)$ non presenti alcuna transizione di fase è convalidata da questi risultati numerici. In effetti, i risultati ottenuti con gruppi discreti[7] hanno confermato un'analisi precedente, in cui la dinamica del gruppo $SU(2)$ è stata simulata direttamente[5]. Il confronto tra le funzioni $E(\beta)$, misurate per i due sistemi con gruppo di gauge $SU(2)$ ed O, è illustrato nella figura 10.

Il gruppo O non costituisce il sottogruppo non-abeliano massimale di $SU(2)$. Questo è dato dal gruppo Y, di ordine 120, il sottogruppo di $SU(2)$ le cui rotazioni lasciano invariante il dodecaedro e l'icosae-

dro. Dal punto di vista computazionale, è molto più conveniente lavorare con gruppi di gauge finiti che non con un gruppo continuo. La composizione degli elementi viene effettuata dal calcolatore semplicemente a mezzo di una tabella di moltiplicazione, registrata nell'unità di memoria, anziché tramite algebra matriciale, ed inoltre la registrazione dei valori assunti dalle variabili dinamiche richiede meno elementi di memoria[(9)]. Di tali vantaggi ci si è serviti in uno studio [(8)], in cui il gruppo di gauge Y è stato adoperato per approssimare le proprietà del sistema $SU(2)$ su un reticolo quadridimensionale di estensione lineare 16. Il numero delle variabili dinamiche risulta estremamente elevato (262144 variabili U_{ij}) e nel calcolo dei valori medi anche poche scansioni del reticolo, in equilibrio statistico, sono spesso sufficienti per produrre risultati accurati.

Le figure 11 e 12 illustrano alcuni dei risultati ottenuti. Nella figura 11 è rappresentato il valore della forza di attrazione K tra due cariche, separate da I passi reticolari. L'ipotesi del confinamento consiste nell'assumere che K tenda ad una costante (anziché a zero) per grandi valori di I. Però il limite

$$K_\infty(\beta) = \lim_{I \to \infty} K(\beta, I) \tag{21}$$

rappresenta la misura della forza in unità prive di dimensione. Il valore fisico della forza è dato da

$$F = K_\infty(\beta)/a^2 \ . \tag{22}$$

Inserendo in tale equazione la dipendenza del passo reticolare a dalla costante di accoppiamento g (o da $\beta = 4/g^2$) si deve ottenere un valore che tende ad una costante nel passaggio al limite continuo. Come dicevamo, nell'ipotesi che il limite continuo corrisponda a $g \to 0$, la forma della funzione $a(\beta)$ si può calcolare (per β grande) e quindi la dipendenza di K_∞ da β risulta determinata teoricamente (a meno di una costante di proporzionalità). Le tre linee parallele nella figura 11 rappresentano i valori teorici della funzione $K_\infty(\beta)$ per tre scelte diverse della costante di proporzionalità (l'altra curva rappresenta invece il calcolo di K mediante uno sviluppo di costante forte, valido per β piccolo). Si vede chiaramente che, al crescere di I, le curve $K = K(I, \beta)$ tendono al comportamento predetto in via teorica. Il conto numerico conferma quindi la presenza di una forza attrattiva

a grandi distanze e che i valori assunti da tale forza sul reticolo sono compatibili con l'esistenza di un limite continuo; inoltre permette la determinazione della costante di proporzionalità e, quindi, del valore fisico di F.

Al crescere di β, il passo reticolare $a(\beta)$ diminuisce. Per grandi valori di β separazioni dell'ordine di pochi passi reticolari corrispondono quindi a distanze molto brevi ed una misura del potenziale tra due cariche deve produrre una dipendenza dalla separazione di tipo coulombiano, anche per una teoria non-abeliana. La figura 12 illustra il risultato di una misura del genere[8]: i dati numerici sono in ottimo accordo con una legge di proporzionalità inversa dalla distanza.

Questi e molti altri risultati, che si sono potuti ottenere di recente, confermano l'utilità della formulazione reticolare delle teorie di gauge e lasciano sperare che, in un prossimo futuro, la nostra comprensione delle interazioni governate da una costante d'accoppiamento forte sarà abbastanza completa.

BIBLIOGRAFIA

(1) K. Wilson, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 2445.

(2) N. Metropolis, A. Rosenbluth, A. Teller ed E. Teller, *J. Chem. Phys.* **21** (1953) 1087.

(3) M. Creutz, L. Jacobs e C. Rebbi, *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979) 1390.

(4) M. Creutz, L. Jacobs e C. Rebbi, *Phys. Rev.* **D20** (1979) 1915.

(5) M. Creutz, *Phys. Rev. Lett.* 43 (1979) 553 e *Phys Rev.* **D21** (1980) 2308.

(6) K. Wilson, *Cargèse Lecture Notes* (1979).

(7) C. Rebbi, *Phys. Rev.* **D21** (1980) 3350.

(8) G. Bhanot e C. Rebbi, in corso di stampa su Nuclear Physics B, 1981.

(9) L. Jacobs e C. Rebbi, in corso di stampa su Journal of Comp. Phys. vol. 40, 1981.

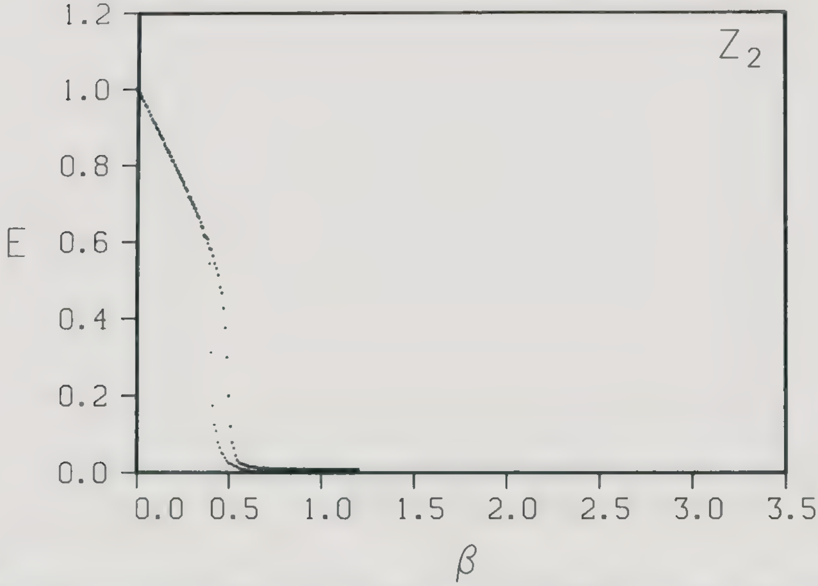


Figura 1 - Simulazione di un ciclo termico per un modello con gruppo di gauge Z_2.

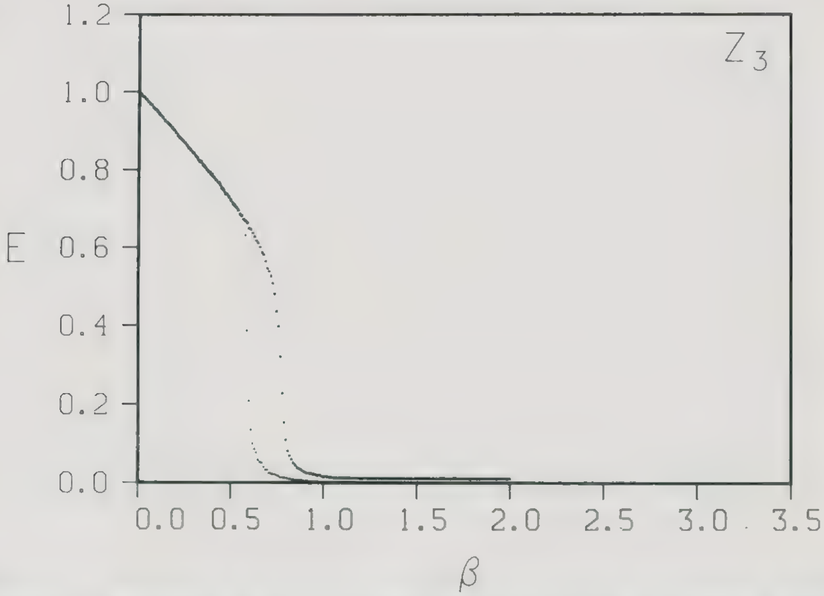


Figura 2 - Simulazione di un ciclo termico per un modello con gruppo di gauge Z_3.

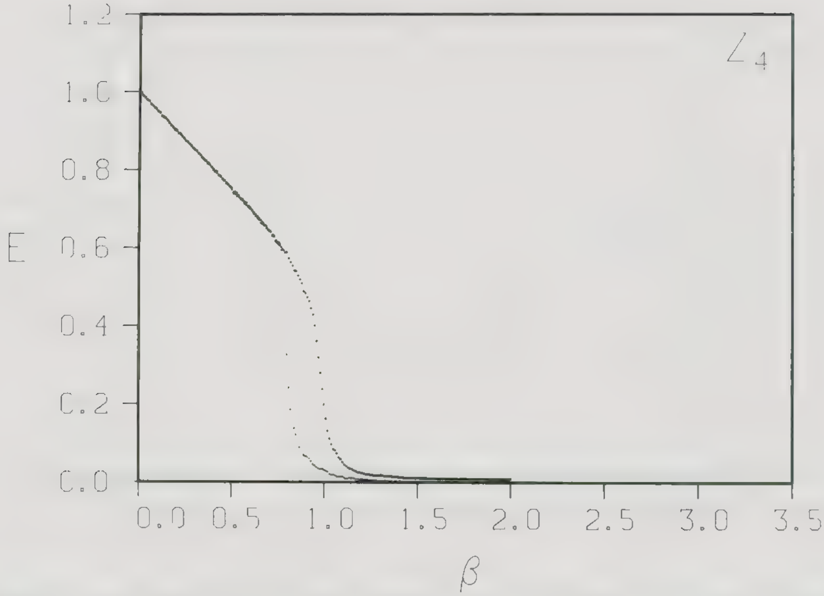


Figura 3 - Simulazione di un ciclo termico per un modello con gruppo di gauge Z_4.

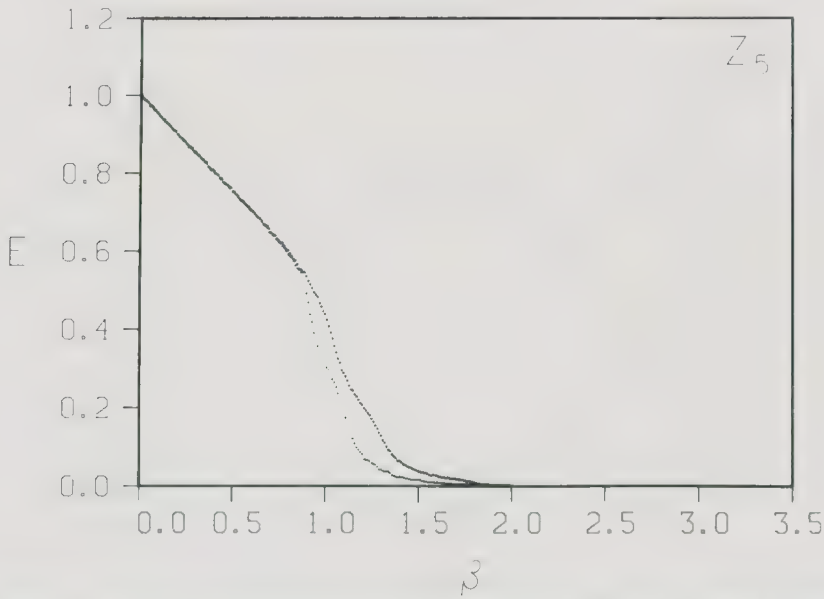


Figura 4 - Simulazione di un ciclo termico per un modello con gruppo di gauge Z_5.

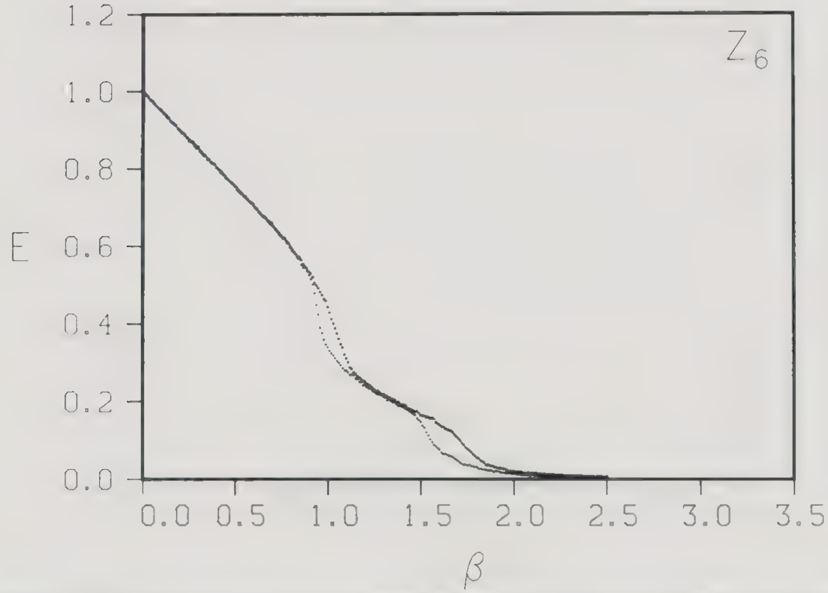


Figura 5 - Simulazione di un ciclo termico per un modello con gruppo di gauge Z_6.

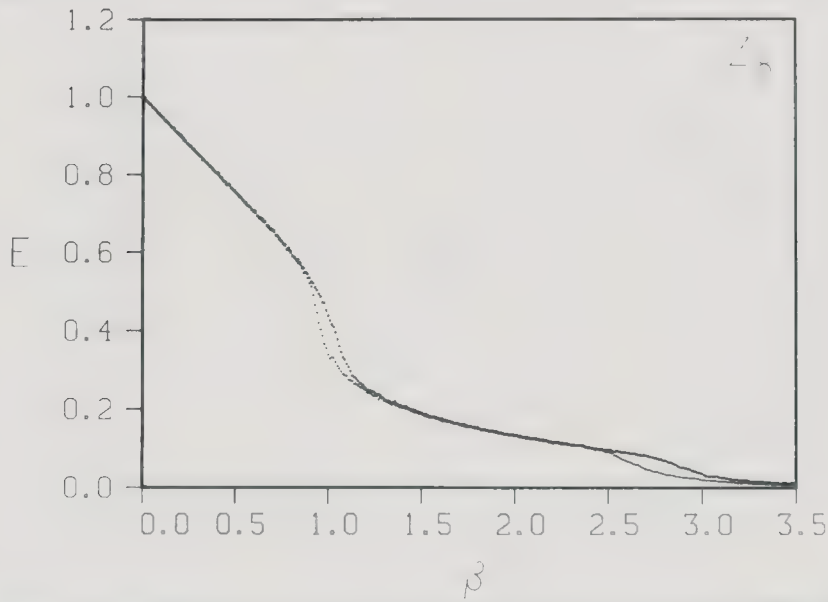


Figura 6 - Simulazione di un ciclo termico per un modello con gruppo di gauge Z_8.

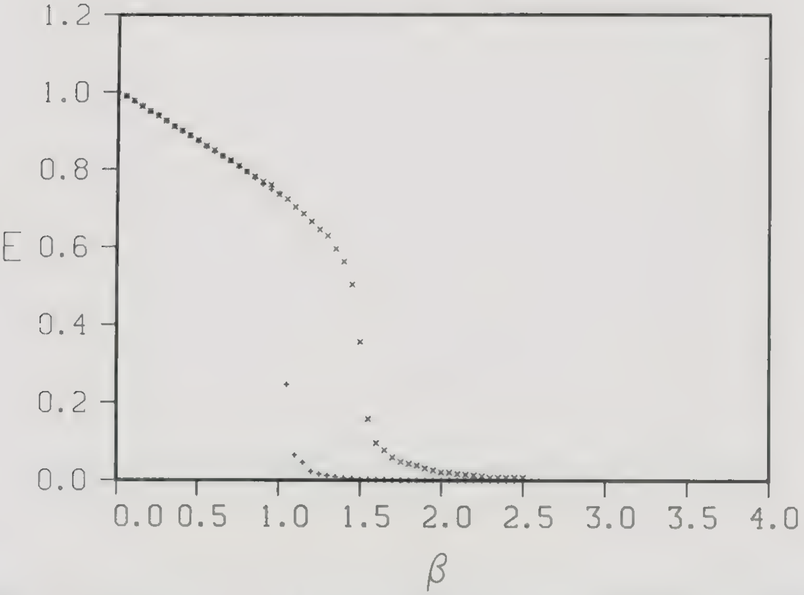


Figura 7 - Simulazione di un ciclo termico per un modello con gruppo di gauge Q.

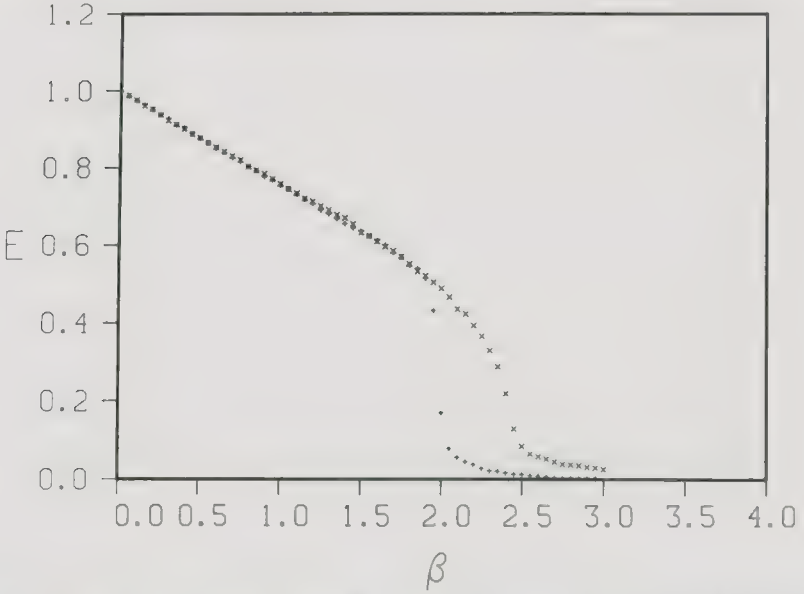


Figura 8 - Simulazione di un ciclo termico per un modello con gruppo di gauge T.

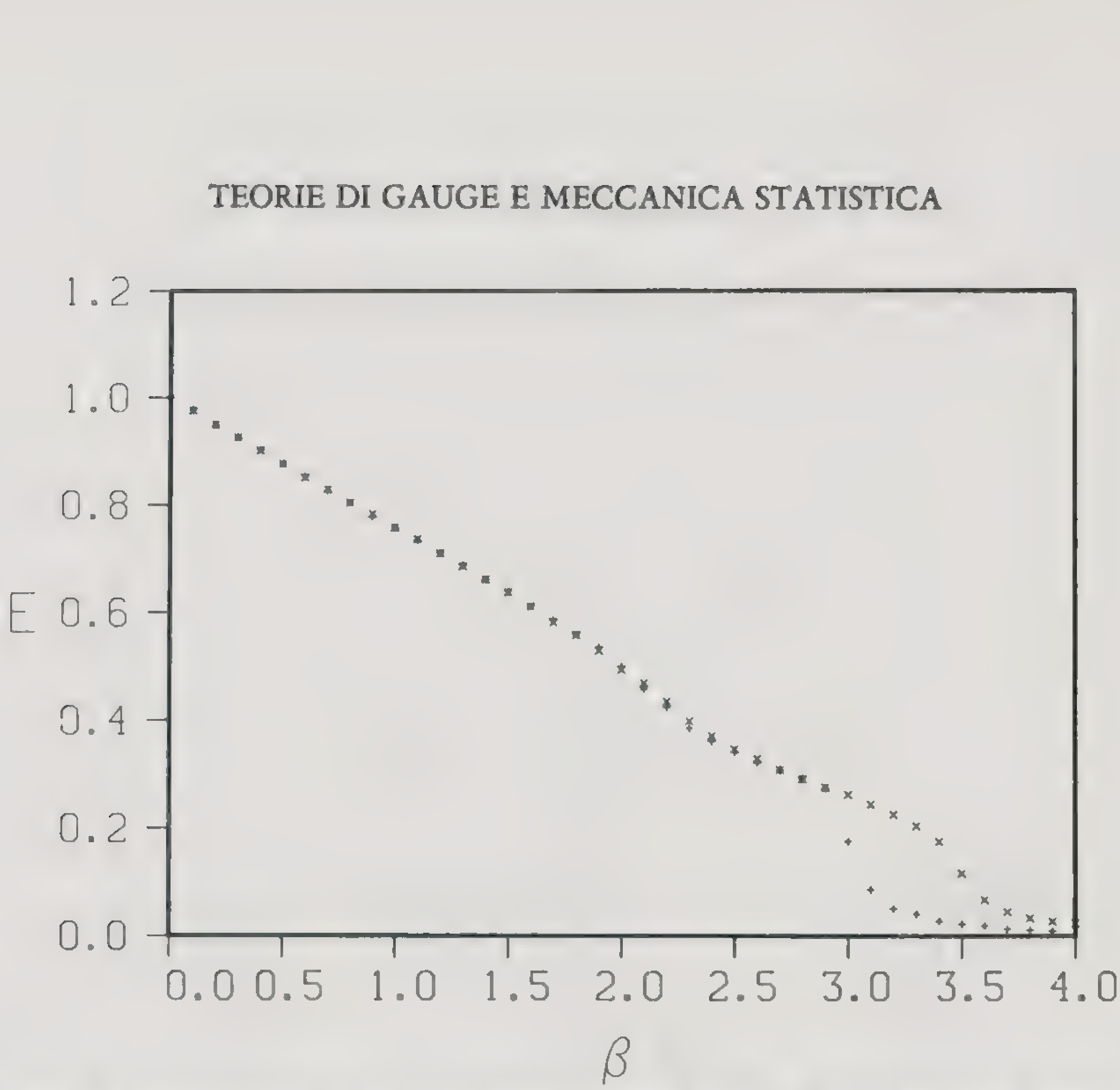


Figura 9 - Simulazione di un ciclo termico per un modello con gruppo di gauge *O*.

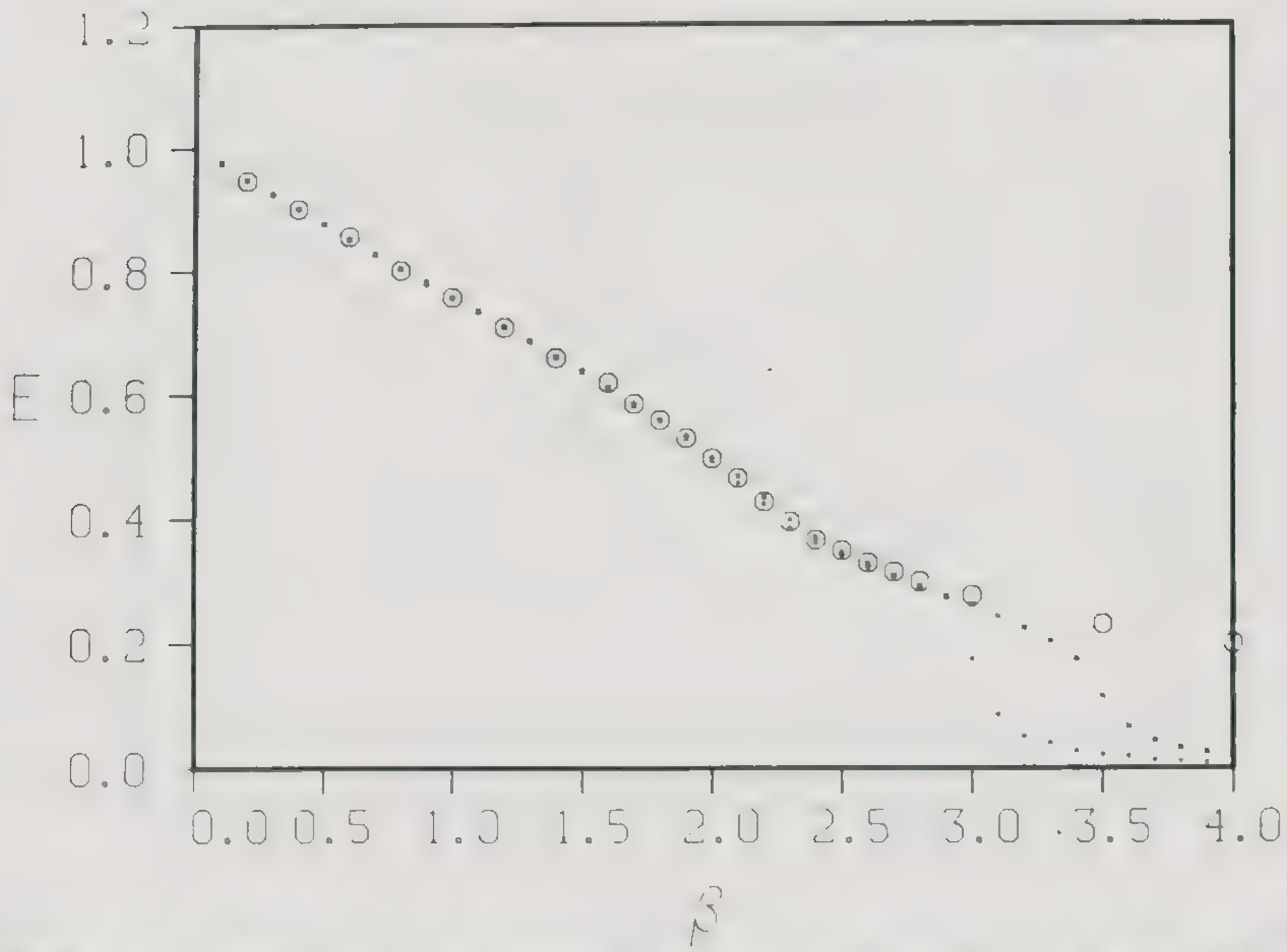


Figura 10 - Confronto delle funzioni $E=E(\beta)$ per i modelli con gruppo di gauge $SU(2)$ (0) ed O (x e +).

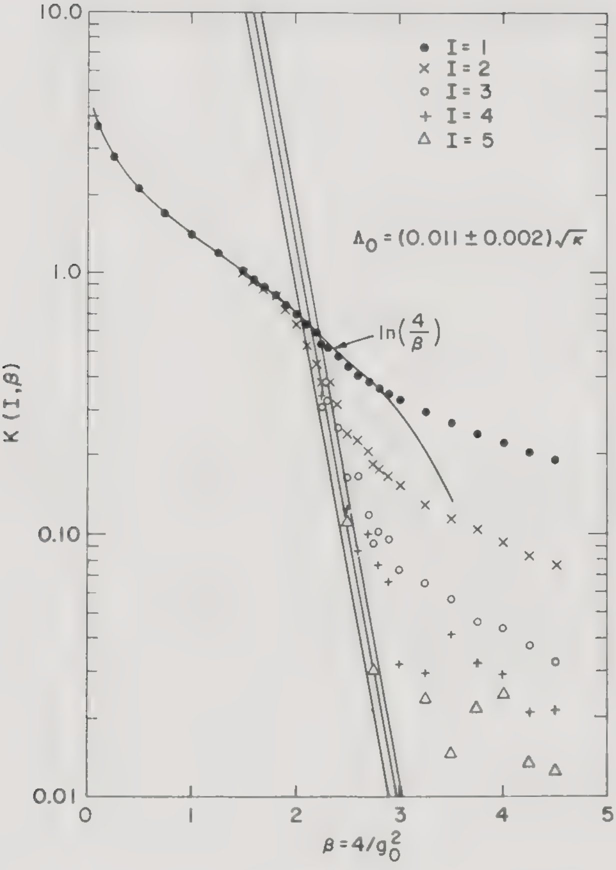


Figura 11 - Forza tra due cariche (nel modello *Y*) in funzione della distanza e della costante di accoppiamento.

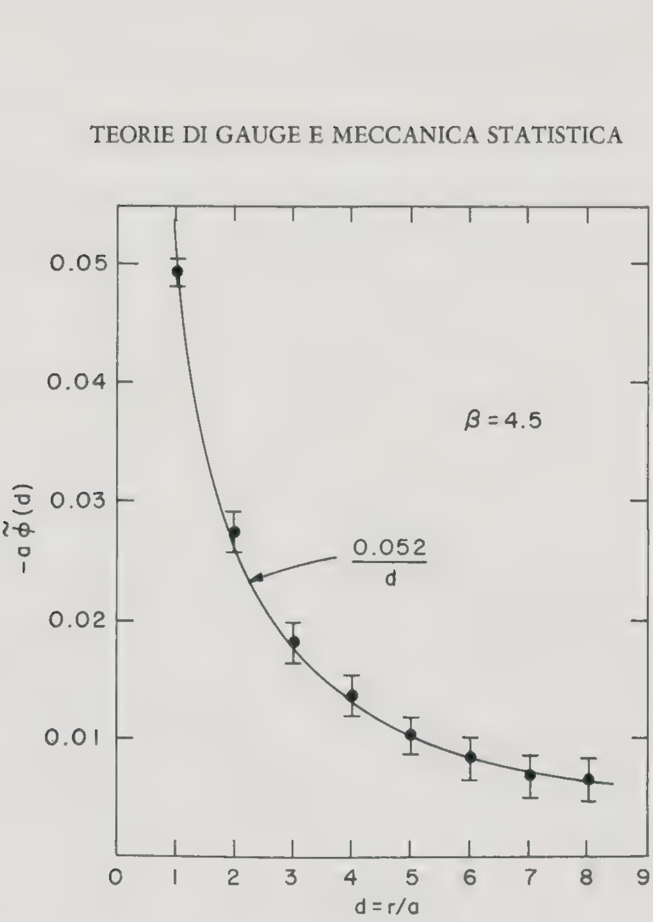


Figura 12 - Potenziale tra due cariche nel modello *Y* a corta distanza.

The brownian motion about elementary particles of a lonely physicist in the last twenty years

Bruno Ferretti *

The starting point of this talk is the problematic nature of the very notion of "baryonic number", due to the lack of a satisfactory field-theoretical definition (in the sense of Faraday) of the notion itself. This lack makes it impossible to define in an ideal operational manner the relevant local quantum observables.

This point considered, the case of the "baryonic number" appears to be essentially different from that of the "electric charge", as it was pointed out quite a time ago(1), and for the very reason just now mentioned.

In consideration of the fundamental role of the notion of baryonic number in the theories of the elementary particles, the point was already quite troublesome. But, in my opinion, there were other reasons to doubt of the soundness of the common theoretical approach to the problem of elementary particles, until quite a recent past. One reason was the common belief in a "S-matrix theory" as a theory for elementary particles(2). Now in physics, neither the zero nor the infinite do exist. This implies the necessity to specify at least the order of magnitude of some relevant physical quantity, each time one talkes of "asymptoticity" in physics. (Incidentally this holds too in statistical mechanics). One has therefore to specify a minimum length if one is willing to take seriously an S-matrix theory, as a fundamental theory.

The difficulties of tackling over a minimum length are well known: for instance, Lorentz invariance and (more subtle) Einstein causality.

* Istituto di Fisica, Bologna, Sezione I.N.F.N., Bologna.

(Fierz, for instance, in connection with attempts to introduce an indefinite metrics, to avoid divergences, has pointed out the possibility that "microviolations" of causality eventually "diffuse" into a "macroviolantion").

I have tried some counter-examples against this kind of difficulties[3]. It was proved in this way that there is not a logical contradiction admitting together Lorenz invariance, macrocausality and a minimum length (of course in the counter-examples some other features of the real world had to be given away).

The difficulties of proceding with this approach toward a more realistic picture proved soon, however, to be over-heading. The thing, on the other hand, was not completely deceiving because during this investigation it was quite soon perceived that Planck's radius was a good candidate to the role of the "minimum length". We shall come back soon on this point, which might be quite interesting.

Eventually a considerable hope of a decisive light did come from the discovery of the "supersymmetry and supergravity"[4]. (In the following we shall assume the CERN version of this kind of theories: Wess and Zumino, Deser and Zumino, and so on).

The reasons for this hope are several:

a) the intrinsic beauty of this kind of theories;
b) the fact that apparently they are proceding in the right direction (unification of e.m, and weak interactions);
c) the fact that they contain gravity;
d) the fact that at least at the lowest order they provide *automatically* the cancellation of divergencies in theories otherwise unrenormalizable;
e) last but not least, the fact, pointed out by Deser and Zumino, that the theory, by the unification of different fields of integral and semi-integral spins superposed in a coherent way, *automatically* overcomes Velo and Zwanziger acausal propagation, which, in case of fields of well definite spin greater than one, and with any interaction, is an absolute no-go theorem.

Particularly facts d) and e) are two half-miracles.

It is quite hard to believe two half-miracles, if in the theory there is nothing fundamentally true.

Now, one fundamental aspect of these theories is that they are field-theories and not merely asymptotical theories. In this connection both the lack of a field theoretical definition of the baryonic number, and the fact that the Planck radius is so exceedingly small become relevant.

About the first point it is very remarkable that, following most super-symmetric theories the so-called baryon number is not exactly conserved. Al already commonly realized, the experiments designed to verify a possible break of the relevant conservation law, are therefore of paramount importance. That is so even if it might prove difficult to establish a reliable upper limit to the life of the proton and to the neutron-antineutron oscillation period on the basis of what we know up to now.

For several reasons both the results of the experiments about neutron-antineutron oscillation and about single nucleon disintegration, if positive, can be very illuminating. In my opinion both kinds of experiments should therefore be performed. Even in the case in which only one kind of experiment should give a definite positive answer, the information would be very valuable. This point of view might be illustrated by the following simple analysis. Let us recall that the probability of transition for unit time can be given by the expression:

$$1/\tau = \frac{2\pi}{\hbar} \overline{|\langle \alpha_f | V | \psi_i \rangle|^2} \ \rho_f(E) \tag{1}$$

where α_f are the "asymptotical (S-matrix) final states", ψ_i the "corresponding effective lagrangian initial states", V the relevant part of "interaction" in the effective lagrangian, and $\rho_f(E)$ the relevant density of final states for unity of energy in the effective observational situation; $\overline{|\langle \alpha_f | V | \psi_i \rangle|^2}$ eventually means a suitable average on the relevant matrix elements modulus-squared.

The preceding expression has the advantage of early separating the "dynamical" part from the merely statistical part in the calculation of probability of transition for unit time.

To begin with, let us apply to the analysis of the $N-N$ transition (in absence of a magnetic field). In this case $\rho_f(E)$ is quite safe and simple to evaluate, only one final state is possible; $\rho_f(E)\Delta E$ therefore must be equal to one. ΔE is the indefinition of the energy; it is

clearly determined by the life-time of the neutron (about 10^3 secs). It follows that, if τ is experimentally determined by the neutron-antineutron oscillation, the expression (1) should give an interesting information on the dynamics of the process in a quite direct manner. This of course can be very meaningful even if the proton disintegration is not observed.

On the other hand, it appears to me that two nucleons annihilation in a single composite nucleus is less easy to interpret. Let us consider for instance the investigation of Mohapatra and Marshak (CCNY-HEP-80/7 (1980); preprint). A quite decisive point appears to be a factor 10^{-2} for the overlap effect of the wave functions of the two nucleons inside the nucleus (pag. 5 of the quoted preprint). It is not clear to me whether the effect of the hard repulsive core of the nuclear forces has been considered. Some calculation which I have performed on this point make 10^{-5} (and perhaps a much smaller factor) appear to be a more likely factor. Should I be right, $N-\bar{N}$ oscillation experiment would be even more attractive.

G. G. Chetyrkin and al. have consideren $N - \bar{N}$ oscillation inside a composite nucleus ($N - \bar{N}$ oscillations Moscow 1980). I have performed an evaluation of the minimum of the free $N - \bar{N}$ assuming the validity of the model of Chetyrkin and al. and my results coincide inside a factor 5 (which is not too bad, given the circumstances) with the results of the quoted pre-print. One has however to remark that a reliable evaluation in quite problematic, taking in due account the collective aspect of the nuclear dynamics.

Let us come, eventually, to the proton disintegration. Even if $N-\bar{N}$ oscillation cannot be observed experimentally because its period turns out to be too long, if in some manner one can observe proton disintegration, one might get perhaps some light on the superheavy mass which appears to have an important part both in theoretical cosmology and super-symmetry, by an analysis quite similar to the previous one.

And now we shall consider the second point i.e. the meaning of Planck's radius as a possible candidate to be a minimum lenght.

Two different considerations are relevant:

a) infinities (and ghost) difficulties are relieved, but apparently not completely removed by super-symmetry. Several people again

believe that some "fuzziness" at very short distances might be helpful in order to overcome these difficulties.

b) The fact the Plank's radius is so exceedingly small, induces to believe that the "fuzziness" introduced at this scale is not very disturbing, in vue of the "locality" required by a field theory, at an even extremely microscopical but in some way accessible scale.

But following this line of thought, i.e. considering the minimul length as denoting some fundamental limitation to the possibility of a precise localisation, it becomes evident that it is necessary to find out by the way of ideal experiments whether such limitation really does exist.

By investigating this point, I realized that the best way was to try to define "surfaces", "lines" by intersections of the previously defined surfaces and so on, like in the actual praxis of the workshop, and to see whether the best ideal realisation does really imply a certain fundamental "fuzziness". In this optics, the fundamental things are the surfaces; after some attempt, I persuaded myself that the best object to be considered (i.e. with a minimum fuzziness) is the surface of a neutron star in thermal equilibrium with the fossil radiation.

The "average surface" has to be determined with respect to a similar surface (of another neutron star) by means of a "coherent bundle of radiation" of appropriate frequency. The mass of the star might be assumed to be about 2.7 Sun masses, the average distance of the neutrons 10^{-13} cm, the radius of the star about 10^6 cm; eventually the average oscillation of the position of the neutron has been calculated, taking into account both the effect of the gravitational forces and of the nuclear forces. The most delicate point is the last one. Two circumstances are relevant:

a) the dependence of the average potential of nuclear forces on the distance across the star surface;
b) the wave properties of the neutron.

Of course, once clarified point a), point b) is trivial.

To estimate a) I have used a Fermi-Thomas model, writing in the usual (non relativistic) way the relation between the average potential and the number of the neutrons:

$$N=4\pi \int_0^{R_S} R^2\, dR\, M^{3/2}\, \frac{\sqrt{2^9}\,\pi}{3\hbar^3}\,(W-V)^{3/2} \qquad (2)$$

where N is the number of the neutrons of the star, R_S its radius, W the maximum kinetic energy, and M the mass of the neutron. V is the total potential (gravitational plus (averaged) nuclear potential).

The averaged nuclear potential has been determined, on the other hand, as a function of the density of the neutrons, assuming a quite standard meson force potential, with repulsive core. This part of the estimate is rather tricky, and might introduce considerable errors due to the importance of short range forces in the present case. In any case the averaged nuclear potential appears to drop out across the star surface more rapidly than exponentially in distances of the order of 10^{-14} cms. Relativistic correction, on the other hand, appear, if any, to increase the steepness of the potential.

Should all this be correct, the average indefinition of the position of a single neutron across the star surface should be about 2.5-5.10^{-14} cms.

It comes out then that, without considering statistical correlations in the motion of the nucleon, the "fuzziness" of the surface is about 2.5-5.10^{-33} cm, in appearent remarkable coincidence with the Plank's radius. This coincidence of course might very well be accidental.

Eventually I come to an admittedly sheer speculation on cosmological matters, merely founded on conceptual difficulties in reconciling internal symmetry with superselection rules (W.W.W. Phys. Rev. **88** 101 1952).

The speculative step which in suggested here, is to take seriously the dimensions of the "representation space" of the internal symmetries as dimensions of the real space, having actually amplitudes of the order of magnitude of the Planck radius (in contrast with the ordinary four dimensions of the usual space-time which have actually the amplitude of the actual radius of the universe). Inside this optics it is even possible that a deep invariance might be found in a kind of a super-Liouville theorem. Planck's radius should then be considered variable with time, and so would be the gravitational constant, in conformity with an old Dirac's hypothesis.

REFERENCES

(1) B. Ferretti, *Problemi e metodi della teoria dei campi*, Suppl. N. 2 del N.C. p. 872-881 (1955).

Cfr. pg. 880 and 881 particularly the close of the paper that (more or less) sounds as "Now the time-space regions in which such (extremely high) temperatures might be realized don't appear to be limited to the smallest regions which a priori can be meaningfully considered".

B. Ferretti, *On the Conservation of the Nucleons*, N.C. 4 p. 951-952 (1956). This paper has been quoted by S. Fubini in a talk at CERN. I am very grateful to my friend Fubini for remembering that I was talking of the problem when I was director fo the theoretical division of CERN and to Yamaguchi for having consideren my point seriously enouch, to inspire the pioneering experimental investigation at CERN by Backenstoss and others. (N.C. **15** p. 749-755 (1960)).

(2) Particularly Geoffrey F. Chew was a champion of this point of view (cfr. G. F. Chew S. Matrix Theory of Strong Interactions).

(3) F.i. B. Ferretti, N.C. **43** A 507 (1966) and **43** 516 (1966).

(4) S. Deser and B. Zumino, *Consistent Supergravity*, Phys. Lett. **62B** 355 (1976).

S. Deser and B. Zumino, *Broken Supersymmetry and supergravity.*

B. Zumino, *Supergravity and Grand Unification*, Ref. Th. 2954-CERN 24 Sept. 1980 and others.

For the fact e) listed in this context cfr. G. Velo and D. Zwanziger, Phys. Rev. **186** 1337 (1969) and **188** 2218 (1969).

Problemi di cromodinamica quantistica nella fisica del quarkonio

Alessandro Bottino *

A Mario Verde, con stima e con gratitudine per gli insegnamenti ricevuti.

1. Introduzione

Notevole attività di ricerca è stata dedicata in questi ultimi anni a verifiche di previsioni della cromodinamica quantistica (QCD)[(1)], per stabilire se questa costituisca la teoria corretta delle interazioni forti. Le analisi fenomenologiche e le misure sperimentali in questo campo sono state rivolte prevalentemente a processi d'urto (urto altamente anelastico leptone-nucleone, sezione d'urto totale adronica e produzione di getti in annichilazione e^+e^-, produzione adronica di coppie leptoniche, ecc.), alla spettroscopia adronica ed ai decadimenti adronici di stati legati $q-\bar{q}$ (quarkonio). Queste ricerche mostrano che la QCD è in buon accordo con i dati sperimentali, anche se finora non esiste una verifica probante e definitiva della teoria stessa.

Nel presente articolo vengono presentati e discussi alcuni degli aspetti più interessanti della QCD nell'ambito della fisica dei mesoni pesanti che sono interpretabili come stati legati $q-\bar{q}$, dove q denota il quark c (charm) oppure il quark b (bottom). Esistono parecchi dati sperimentali riguardanti le masse e le larghezze di decadimento di stati di questo tipo [(2-4)]; per esempio, i dati riguardanti i mesoni vettoriali ψ ($c\bar{c}$ in configurazione $1\,^3S_1$) a 3.10 GeV e Υ ($b\bar{b}$ in configurazione $1\,^3S_1$) a 9.46 GeV e loro eccitazioni radiali ed orbitali: ψ' ($c\bar{c}$ in $2\,^3S_1$) a 3.69 GeV, ψ'' ($c\bar{c}$ in $1\,^3D_1$) a 3.77 GeV, ...[1], Υ' ($b\bar{b}$ in $2\,^3S_1$) a 10.0 GeV, ...

---

* Istituto di Fisica Teorica, Università di Torino, I.N.F.N., Sezione di Torino.
Scuola di Specializzazione in Fisica Nucleare, Università di Torino.

[1] I livelli energetici degli stati $c\bar{c}$ osservati sperimentalemnte sono riportati in fig. 1 (da K. Gottfried, lavoro citato in [(5)]).

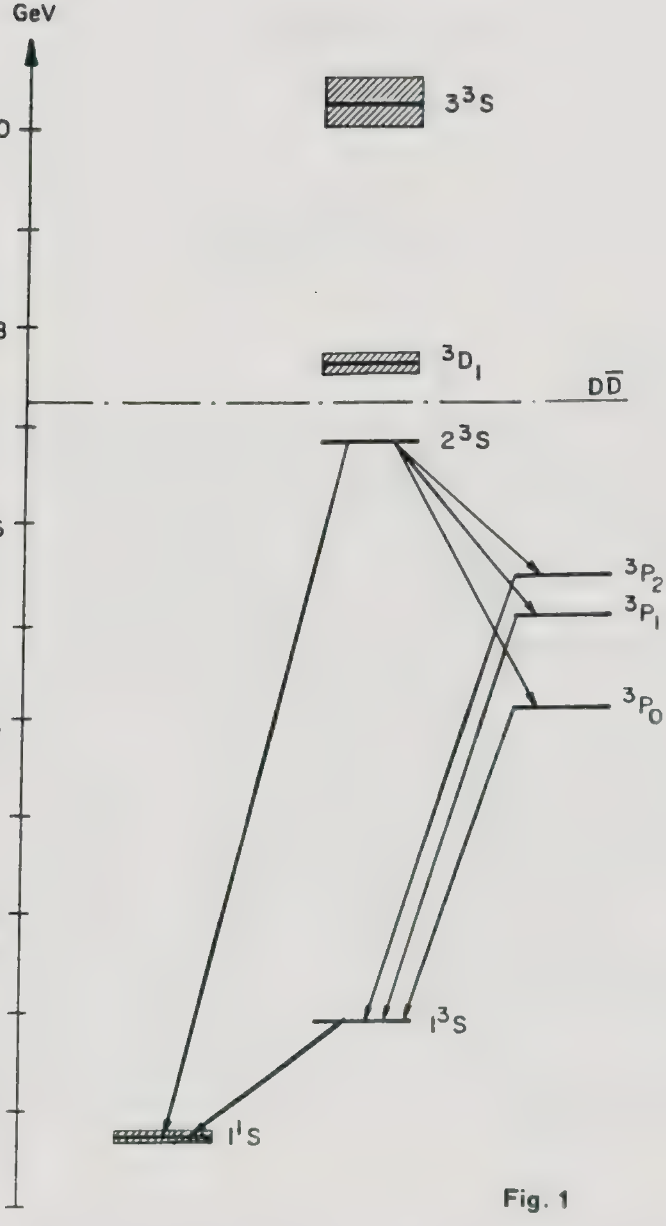


Fig. 1

Figura 1 - Spettro del sistema $c\bar{c}$ (da Gottfried[5]). La linea orizzontale indica il valore di soglia per produzione associata $D\bar{D}$ e le aree tratteggiate indicano le larghezze dei livelli. Sono inoltre indicate le transizioni radiative osservate.

Lo schema del presente lavoro è il seguente. Nel secondo paragrafo viene presentata la problematica relativa al potenziale statico $q-\bar{q}$ in connessione con la spettroscopia del quarkonio e quindi, ai paragrafi successivi, vengono studiati i decadimenti dei mesoni vettoriali pesanti con lo scopo principale di confrontare le valutazioni teoriche della QCD per la costante efficace di accoppiamento forte con i più recenti dati sperimentali. Nel corso di questa analisi vengono discusse due questioni particolarmente importanti per la QCD: il problema dei termini perturbativi di ordine superiore e quello, connesso al precedente, della dipendenza dei calcoli perturbativi dal procedimento di rinormalizzazione. Nell'ultimo paragrafo sono presentate alcune conclusioni.

2. Potenziale $q-\bar{q}$ e spettroscopia del quarkonio

I sistemi $q-\bar{q}$ pesanti sono stati studiati da molti autori[5-8] nell'ambito di una trattazione non relativistica. Tale approssimazione è giustificata dal fatto che, ad esempio, nello stato $1\,^3S_1$ di $c\bar{c}$ e di $b\bar{b}$ si ha $v^2/c^2 \simeq 0.20$ e 0.08, rispettivamente. Il punto cruciale del problema è evidentemente quello della scelta del potenziale dell'interazione quark-antiquark.

Nell'ambito della QCD si può tentare di costruire questo potenziale richiedendo che esso soddisfi i due requisiti fondamentali della libertà asintotica e del confinamento dei quarks. Più precisamente, $V(r)$ può essere calcolato mediante trasformata di Fourier dell'ampiezza di scambio di un gluone

$$V(q^2) = 4\pi \frac{4}{3} \frac{\alpha_s(q^2)}{q^2}, \qquad (2.1)$$

dove $\alpha_s(q^2)$ è la costante efficace di accoppiamento forte. Il comportamento asintotico di $\alpha_s(q^2)$ per grandi q^2 tipo-spazio ($q^2 < 0$) richiesto dalla QCD[9] è

$$\alpha_s(q^2) \sim \frac{1}{b \ln(-q^2/\Lambda^2)} \quad (-q^2 \gg \Lambda^2), \qquad (2.2)$$

dove Λ è una parametro di scala da determinarsi sperimentalmente (indicativamente Λ è dell'ordine di 0.3-0.5 GeV) e

$$b = \frac{1}{4\pi} \left(11 - \frac{2}{3} N_f\right) \tag{2.3}$$

(N_f = numero degli "operational quark flavours", ossia numero di quarks $q_1, q_2, \ldots, q_{N_f}$ di diverso flavour con masse tali che

$$(2m_1)^2, (2m_2)^2, \ldots, (2m_{N_f})^2 < |q^2| ;$$

quindi $N_f = 3$ per $|q^2| \sim 10$ Gev^2, $N_f = 4$ per 10 GeV^2 $< |q^2| < 100$ GeV^2).

D'altra parte l'andamento asintotico di $\alpha_s(q^2)$, e quindi di $V(q^2)$, a piccoli q^2 dipende dalle proprietà di confinamento del potenziale, ossia dalle proprietà di $V(r)$ a grandi $r (\Lambda r \gg 1)$. Se si sceglie un confinamento lineare. $V(r) \propto r$, come suggerito dalle teorie di gauge non-abeliane formulate sul reticolo(10), allora, passando allo spazio del momento, si ha

$$V(q^2) \sim \text{cost} \frac{1}{(q^2)^2} \quad (-q^2 \ll \Lambda^2) . \tag{2.4}$$

Una possibile espressione per $V(\vec{q}^{\,2})$ che interpola i due andamenti asintotici (2.2) e (2.4) è

$$V(\vec{q}^{\,2}) = -\frac{4}{3} \frac{4\pi}{b\, \vec{q}^{\,2} \ln\left(1 + \frac{\vec{q}^{\,2}}{\Lambda^2}\right)} . \tag{2.5}$$

La trasformata di Fourier di quest'ultima espressione fornisce il potenziale (di Richardson(6)), riprodotto in figura 2, il cui comportamento asintotico a piccole distanze risulta essere

$$V(r) \sim \text{cost} \frac{1}{r \ln(\Lambda r)} \quad (\Lambda r \ll 1) . \tag{2.6}$$

Calcoli dettagliati di separazioni dei livelli energetici e di larghezze di decadimento leptonico per i sistemi $c\bar{c}$ e $b\bar{b}$ hanno fornito risultati in buon accordo con i dati sperimentali, in corrispondenza dei seguenti valori per i parametri liberi: $m_c \simeq 1.5$ GeV, $m_b \simeq 4.9$ GeV, $\Lambda \cong 0.4$ GeV(6).

E' interessante osservare che l'andamento asintotico lineare del potenziale a grandi r può essere messo in relazione con il modello a corda che trova la sua applicazione nella spettroscopia dei mesoni leggeri(11). In questo modello, un potenziale lineare $V(r) = kr$ permet-

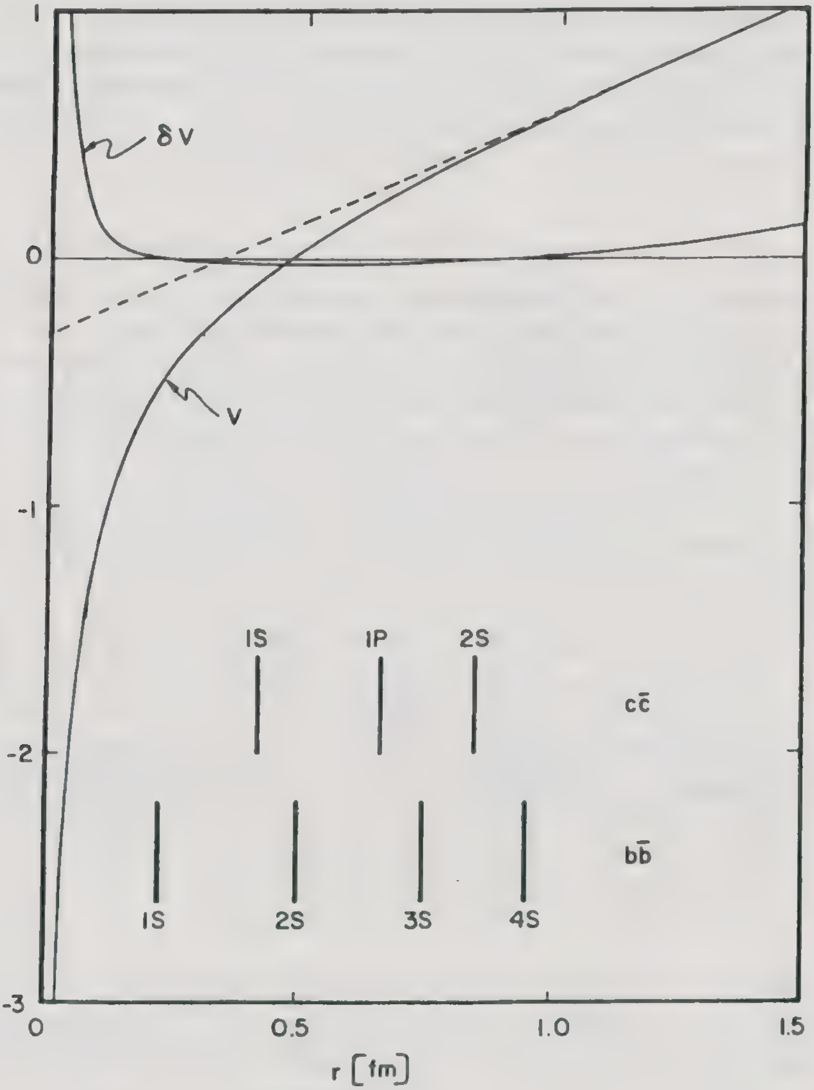


Fig. 2

Figura 2 - La curva *V* rappresenta il potenziale di Richardson[6], la δV riproduce la differenza tra questo ed il potenziale di Martin[7], la linea tratteggiata è l'estrapolazione del potenziale di confinamento lineare. I tratti verticali indicano i valori dei raggi quadratici medi di alcuni stati legati $c\bar{c}$, $b\bar{b}$. (Questa figura è tratta da Gottfried[5]).

te di ricavare la relazione $E^2 = 2\pi k J$ tra energia dello stato, E, e momento angolare totale, J. Confrontando con la formula delle traiettorie di Regge si trova $\alpha' = (2\pi k)^{-1}$ dove α' è la pendenza di Regge. Se uguagliamo ora la trasformata di Fourier di $V(r) = kr$ con lo sviluppo asintotico della (2.5) a piccoli $\vec{q}^2$, troviamo

$$\alpha' = \frac{3}{4\pi} \frac{b}{\Lambda^2} . \tag{2.7}$$

Ponendo $N_f = 3$ ed utilizzando il valore $\Lambda \simeq 0.4$ GeV si ottiene $\alpha' \simeq \simeq 1.1\ \mathrm{GeV}^{-2}$, in ottimo accordo con i dati sperimentali.

Va notato che la precedente analisi, la quale ha condotto all'Ansatz (2.5), soffre di ambiguità per quanto riguarda la QCD. Infatti è noto che per una definizione univoca del parametro Λ è necessario spingere il calcolo di α_s all'ordine successivo al dominante[12]. Discuteremo questo punto al prossimo paragrafo; qui vogliamo soltanto notare che analisi è la Richardson all'ordine superiore sono state eseguite[13], ma che esse non modificano in modo rilevante le precedenti conclusioni.

Verrebbe ora naturale interpretare il successo del potenziale di Richardson nel riprodurre alcune proprietà dei sistemi $q-\bar{q}$ pesanti come una verifica di validità della QCD. In realtà ciò non è corretto in quanto i risultati sopra indicati non dipendono in modo sensibile dalle caratteristiche peculiari di QCD del potenziale di Richardson. Questo è stato mostrato in modo particolarmente chiaro da A. Martin[7] il quale ha riprodotto con uguale successo i dati sperimentali del quarkonio utilizzando il potenziale

$$V(r) = A + B\,r^c \tag{2.8}$$

che non ha particolari motivazioni fisiche. Scegliendo opportunamente i valori dei tre parametri liberi A, B, c, l'espressione (2.8) riproduce bene il potenziale di Richardson nell'intervallo 0.2 $fm \lesssim \lesssim r \lesssim 1.1\ fm$ (si veda fig. 2). Dal momento che i raggi quadratici medi degli stati $c\bar{c}$, $b\bar{b}$ considerati sono compresi in questo intervallo, è naturale che i due potenziali forniscano approssimativamente i medesimi risultati.

La conclusione è quindi che una verifica delle previsioni della QCD per quanto riguarda il comportamento del potenziale alle piccole distanze (libertà asintotica) ed alle grandi distanze (confinamento) a

partire dai dati sperimentali sugli stati legati $q-\bar{q}$ di quarks c e quarks b è estremamente difficile. Sistemi $q-\bar{q}$ che dipenderebbero sensibilmente dall'andamento a corta distanza del potenziale sarebbero quelli relativi ad un, per ora, ipotetico quark t molto pesante ($m_t \gtrsim 20$ GeV).

3. Decadimenti adronici

Veniamo ora ad esaminare il problema dei decadimenti degli stati $c\bar{c}$ e $b\bar{b}$ ricordando innanzitutto il motivo del loro interesse in relazione alla QCD. Prendiamo ad esempio il mesone vettoriale ψ. I suoi modi di decadimento possono essere rappresentati mediante i diagrammi di quarks indicati in fig. 3. Lo stato ψ, essendo sotto soglia

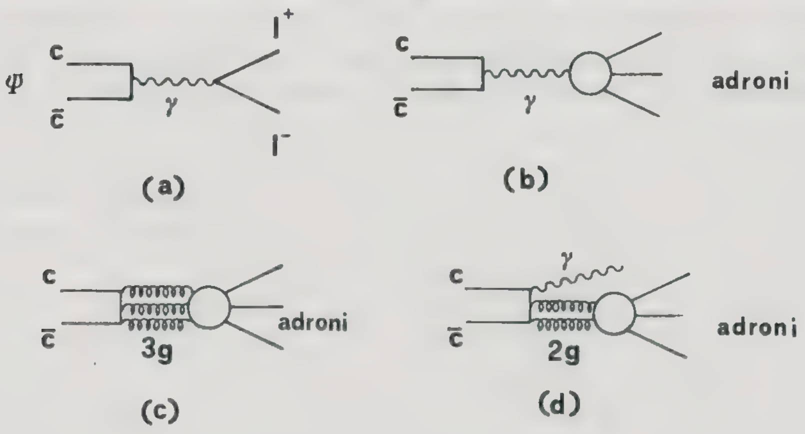


Fig. 3

Figura 3 - Diagrammi di decadimento della ψ.

per la produzione associata di particelle dotate di charm ($D^{\pm}$, D^0, $\bar{D}^0$; $m_D \simeq 1.86$ GeV), non può avere dei diagrammi di decadimento adronico analoghi a quelli della φ (fig. 4) ma può decadere in adroni ordinari attraverso stati di un fotone o di tre gluoni[14]. E' proprio a causa di questa proprietà che la larghezza totale di decadimento della ψ è così stretta ($\Gamma \simeq 69$ keV). Ora, dal momento che il contributo

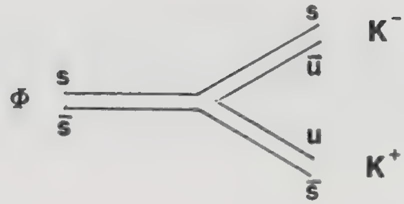


Fig. 4

Figura 4 - Diagramma di decadimento della φ in $K^+ K^-$.

dominante alla larghezza totale deriva dal diagramma a tre gluoni e che la corrispondente ampiezza dipende dalla potenza $\alpha_s^{3/2}$, i dati sperimentali sui decadimenti della ψ offrono la possibilità di una determinazione della costante efficace di accoppiamento forte.

Le stesse considerazioni possono essere immediatamente estese allo stato Υ. Per qunto riguarda gli stati $c\bar{c}$, $b\bar{b}$ di energia più elevata, la situazione è complicata dal fatto che nuovi modi di decadimento sono a loro disponibili. Ad esempio, nel caso della ψ' i due modi di decadimento $\psi' \to \chi(^3P_{0,1,2}) + \gamma$ e $\psi' \to \psi$ + adroni leggeri contribuiscono per il 75% della larghezza totale, riducendo quindi l'importanza del diagramma a tre gluoni. Vedremo in seguito che a causa di questa circostanza e del grosso errore nella misura di $\Gamma_{tot}(\psi')$ non è possibile ottenere dai dati sperimentali sulla ψ' una stima attendibile per la α_s corrispondente.

3.1 Larghezze di decadimento e costante efficace di accoppiamento forte

La larghezza di decadimento per il processo $\psi \to 3g \to$ adroni, calcolata all'ordine più basso in α_s nell'ipotesi che la transizione dallo stato a tre gluoni allo stato finale con adroni fisici avvenga con probabilità uno, è data da(15-16)

$$\Gamma(\psi \to 3g \to \text{adroni}) = \frac{160}{81} (\pi^2 - 9) \, |\psi(0)|^2 \, \frac{\alpha_s^3}{M_\psi^2} \qquad (3.1)$$

dove $\psi(0)$ è il valore della funzione d'onda dello stato $c\bar{c}$ nell'origine. L'uso diretto di questa formula per ricavare α_s dal valore sperimentale di $\Gamma(\psi \to 3\,g \to \text{adroni})$ richiederebbe una valutazione teorica della $\psi(0)$ che introdurrebbe una ulteriore dipendenza (modellistica) da α_s. E' quindi preferibile considerare, assieme alla (3.1), la formula di Van Royen-Weisskopf per la larghezza leptonica [17]

$$\Gamma(\psi \to e^+e^-) = \frac{16\pi\alpha^2}{M_\psi^2} Q_c^2 \; |\psi(0)|^2 \;, \tag{3.2}$$

dove $Q_c = \frac{2}{3}$ è la carica del quark c, e prendere il rapporto

$$B_\psi \equiv \frac{\Gamma(\psi \to e^+e^-)}{\Gamma(\psi \to 3g \to \text{adroni})} = \frac{81\pi}{10(\pi^2-9)} Q_c^2 \; \frac{\alpha^2}{\alpha_s^3} \;. \tag{3.3}$$

Se trascuriamo i decadimenti radiativi e l'interferenza tra l'ampiezza del processo $\psi \to 3g \to$ adroni e la parte $G = -1$ dell'ampiezza del processo $\psi \to \gamma \to$ adroni e se utilizziamo inoltre la relazione

$$\Gamma(\psi \to \gamma \to \text{adroni}) = R \cdot \Gamma(\psi \to e^+e^-) \,, \tag{3.4}$$

dove

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{adroni})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} \quad , \tag{3.5}$$

abbiamo

$$\Gamma(\psi \to 3g \to \text{adroni}) \simeq \Gamma_{tot}(\psi) - (2+R)\,\Gamma(\psi \to e^+e^-) \,. \tag{3.6}$$

Quindi dai valori sperimentali [3]

$$\Gamma_{tot}(\psi) = (69 \pm 12)\ \text{keV} \tag{3.7}$$

$$\Gamma(\psi \to e^+e^-) = (4.8 \pm 1.1)\ \text{keV} \tag{3.8}$$

$$R\,(\sqrt{s} = 3.1\ \text{GeV}) = 2.3 \tag{3.9}$$

ricaviamo

$$\Gamma(\psi \to 3g \to \text{adroni}) = (48 \pm 12)\ \text{keV} \tag{3.10}$$

$$B_\psi = 0.10 \pm 0.03 \,. \tag{3.11}$$

Quest'ultimo risultato permette di ottenere, mediante la relazione (3.3), il valore di α_s relativo alla ψ

$$\alpha_s(\psi)=0.19 \pm 0.02 \,. \tag{3.12}$$

Analogamente, per la Υ, dai dati sperimentali

$$\Gamma_{tot}(\Upsilon) = (40 \pm 10) \text{ keV} \tag{3.13}$$

$$\Gamma(\Upsilon \to e^+e^-) = (1.29 \pm 0.07) \text{ keV} \tag{3.14}$$

$$R(\sqrt{s}=9.46 \text{ GeV})=4 \tag{3.15}$$

abbiamo

$$\Gamma(\Upsilon \to 3g \to \text{adroni}) = (31 \pm 10) \text{ keV} \tag{3.16}$$

e quindi, utilizzando una formula analoga alla (3.3) (Q_c sostituito da $Q_b = -\frac{1}{3}$),

$$B_\Upsilon = 0.042 \pm 0.014 \tag{3.17}$$

$$\alpha_s(\Upsilon) = 0.16 \pm 0.02 \,. \tag{3.18}$$

Nel caso della ψ' dal valore della larghezza totale

$$\Gamma_{tot}(\psi') = (215 \pm 40) \text{ keV} \tag{3.19}$$

e dai valori (centrali) delle larghezze parziali[(2)] si ottiene, come prima, per sottrazione

$$\Gamma(\psi' \to 3g \to \text{adroni}) = 42 \text{ keV} \tag{3.20}$$

e quindi, usando $\Gamma(\psi' \to e^+e^-) = 1.83$ keV,

$$B_{\psi'} = 0.044 \,. \tag{3.21}$$

Notiamo però che questa stima di $B_{\psi'}$ è ben poco attendibile perché si basa su di un valore di $\Gamma(\psi' \to 3g \to \text{adroni})$ che è circa uguale all'errore di $\Gamma_{tot}(\psi')$. In effetti, se si esaminano i rapporti di decadimento di alcuni canali esclusivi ($p\bar{p}\pi^+\pi^-, 2(\pi^+\pi^-)\pi^0, 2(\pi^+\pi^-)$) ci si aspetta piuttosto $\Gamma(\psi' \to 3g \to \text{adroni}) \cong \frac{1}{2}\Gamma(\psi \to 3g \to \text{adroni})$ e quindi $B_{\psi'} \cong$ $\cong B_\psi$ in disaccordo per circa un fattore due con il valore (3.21). (Alla medesima conclusione si giunge se si tiene conto del fatto che il

rapporto delle larghezze di decadimento di ψ' e di ψ per un dato canale esclusivo è proporzionale al rapporto dei corrispondenti $|\psi(0)|^2$. Torneremo in seguito su questo punto, quando daremo una valutazione teorica di $B_{\psi'}$.

3.2 Valutazioni ad ordine superiore e dipendenza dal procedimento di rinormalizzazione.

Le valutazioni precedenti di α_s vanno prese con grande cautela perché sono basate su formule di larghezze di decadimento ((3.1) e (3.2)) calcolate all'ordine perturbativo più basso in α_s. Ora è noto che effetti radiativi di QCD possono portare a termini correttivi notevoli nelle formule precedenti. Per esempio, nel caso del decadimento leptonico, al prim'ordine in α_s, si ha[18]

$$\Gamma(\psi \to e^+e^-) = \frac{16\pi\alpha^2}{M_\psi^2} Q_c^2 \, |\psi(0)|^2 \, [1 + C(\psi \to e^+e^-)] \quad (3.22)$$

con

$$C(\psi \to e^+e^-) = -\frac{16}{3\pi}\alpha_s \, . \quad (3.23)$$

Analogamente la formula per la $\Gamma(\psi \to 3g \to \text{adroni})$ dev'essere riscritta come

$$\Gamma(\psi \to 3\mathrm{g} \to \text{adroni}) = \frac{160}{81}(\pi^2 - 9) \cdot \frac{\alpha_s^3}{M_\psi^2} |\psi(0)|^2 \, [1 + C(\psi \to 3g)] \quad (3.24)$$

Il coefficiente C in questo caso non è stato calcolato; ma una semplice modificazione, dovuta al colore, del termine di correzione radiativa nel decadimento in tre fotoni dell'ortopositronio, $-\frac{10}{\pi}\alpha$, darebbe per $C(\psi \to 3g)$ un valore ancora più preoccupante del precedente (formula (3.23)). La corrispondente correzione relativa al decadimento del paraquarkonio ($q-\bar{q}$ in configurazione $^1S_0$) in due gluoni è[19]

$$C(\text{paraquarkonio} \to 2g) = \frac{22}{\pi}\alpha_s \, . \quad (3.25)$$

Questo risultato potrebbe far dubitare della applicabilità del metodo perturbativo nei calcoli in esame. Va però ricordato che le valutazioni eseguite con serie perturbative troncate dipendono dalla scelta del parametro di sviluppo e quindi dal procedimento di rinormalizzazione [2]. Essendo questo in larga misura arbitrario, vi è la possibilità di definire un opportuno schema di rinormalizzazione in modo tale che lo sviluppo perturbativo abbia un senso. Ricordiamo che l'arbitrarietà nel metodo di rinormalizzazione discende dal fatto che le costanti di rinormalizzazione della teoria sono definite univocamente solo nelle loro parti singolari, mentre, a parte i vincoli stabiliti dalle identità di Ward, sono arbitrarie nelle loro parti finite.

Le prescrizioni di rinormalizzazione più comuni sono quelle di sottrazione minima (MS), di sottrazione minima modificata ($\overline{\text{MS}}$) e di sottrazione nello spazio del momento (MOM)[(21)], le quali tutte fanno uso della tecnica di regolarizzazione dimensionale[(22)]. In base alle più recenti analisi, gli schemi $\overline{\text{MS}}$ e MOM sembrano essere due possibili buoni candidati, mentre invece la prescrizione MS porta sistematicamente a grandi valori per i coefficienti di sviluppo delle grandezze fisiche.

Questo è quanto si verifica appunto nel decadimento del paracharmonio in due gluoni. Infatti, il valore riportato in (3.25), ottenuto con la prescrizione MS[(19)], si riduce notevolmente quando viene eseguita una trasformazione allo schema $\overline{\text{MS}}$ oppure MOM[(23)].

La relazione caratteristica tra costanti di accoppiamento in due diversi schemi è

$$\alpha' = \alpha\,[1 + c\alpha + O(\alpha^2)]\,. \tag{3.26}$$

I valori numerici di c per le trasformazioni di α_s tra le prescrizioni MS, $\overline{\text{MS}}$ e MOM sono dati, per esempio, in[(21)].

Quando la dipendenza di α_s da q^2 viene parametrizzata mediante Λ (vedi (3.31) al paragrafo successivo), è utile avere la corrispondente relazione tra i Λ relativi a due diverse prescrizioni; questa è

$$\Lambda' = \Lambda \exp\left[\frac{c}{2b}\right] \tag{3.27}$$

---

[2] Questo problema è stato recentemente studiato nell'ambito della QCD da molti autori. Vedere, ad esempio, i lavori (20) - (21).

dove b è definito alla (2.3). A titolo di esempio diamo le seguenti relazioni ($N_f = 4$)

$$\Lambda\,(\mathrm{MOM}) = 2.17\ \Lambda\,(\overline{\mathrm{MS}}) \qquad (3.28)$$

$$\Lambda\,(\overline{\mathrm{MS}}) = 2.66\ \Lambda\,(\mathrm{MS})\ . \qquad (3.29)$$

Nel caso del decadimento dell'ortoquarkonio non esiste una valutazione del termine correttivo C e pertanto, anziché considerare direttamente le grandezze B (formula (3.3)), ne studiamo i rapporti. Per esempio,

$$\frac{B_\psi}{B_{\psi'}} = \left[\frac{\alpha_s(\psi')}{\alpha_s(\psi)}\right]^3 \left\{ \left[\frac{1 + C(\psi \to e^+e^-)}{1 + C(\psi' \to e^+e^-)}\right] \Big/ \left[\frac{1 + C(\psi \to 3g)}{1 + C(\psi' \to 3g)}\right] \right\} \qquad (3.30)$$

Tali rapporti di quantità B dovrebbero essere poco sensibili alle correzioni radiative di QCD a causa di cancellazioni. Assumiamo in seguito che sia lecito porre uguale ad uno il termine in parentesi graffa nella formula (3.30). Analoga ipotesi viene fatta per il rapporto B_ψ / B_Υ.

3.3 Valutazione teorica di α_s e confronto con i dati sperimentali .

Passiamo ora alla valutazione della costante efficace di accoppiamento forte alle energie relative ai decadimenti di ψ, ψ' e Υ . Per fare ciò, utilizziamo per α_s la formula all'ordine successivo al dominante (includente i contributi a due-loop della funzione beta) della QCD[12]; ossia, per q^2 tipo-spazio ($Q^2 \equiv -q^2 > 0$),

$$\alpha_s(Q^2) = \tilde{\alpha}_s(Q^2) \left\{ 1 - a\,\tilde{\alpha}_s(Q^2) \ln\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right\} \qquad (3.31)$$

dove

$$\tilde{\alpha}_s(Q^2) = \frac{1}{b \ln \dfrac{Q^2}{\Lambda^2}}\ , \quad a = \frac{1}{(4\pi)^2\, b}\left(102 - \frac{38}{3} N_f\right) . \qquad (3.32)$$

Analisi di dati riguardanti la diffusione profondamente anelastica nell'intervallo 10 $\mathrm{GeV}^2 \leq Q^2 < 100\ \mathrm{GeV}^2$ (dove $N_f = 4$) nello schema di rinormalizzazione $\overline{\mathrm{MS}}$ danno

$$\Lambda\,(N_f=4) \cong 0.3\ \text{GeV}. \tag{3.33}$$

Se assumiamo opportune condizioni di continuità della $\alpha_s\,(Q^2)$ anche alle soglie di nuovi quarks, allora, per esempio, $\alpha_s\,(Q^2=M_\psi^2)$ può essere calcolata con le formule (3.31)-(3.33)

$$\alpha_s\,(Q^2=M_\psi^2)=0.24\,. \tag{3.34}$$

Questo valore è utile per il calcolo del parametro $\Lambda(N_f=3)$ mediante la formula inversa della (3.31)

$$\Lambda=\sqrt{Q^2}\ \exp\left[-\frac{1}{2\,b\alpha_s(Q^2)}-\frac{1}{2}\,\frac{a}{b}\ln(b\,\alpha_s\,(Q^2))\right]. \tag{3.35}$$

Si ottiene

$$\Lambda(N_f=3)=0.35\ \text{GeV}\,. \tag{3.36}$$

Siamo ora in grado di calcolare α_s ai valori di Q^2 tipo-tempo ($Q^2<0$) relativi ai decadimenti dei mesoni vettoriali[24]. Infatti, continuando analiticamente la formula (3.31) dal semiasse reale positivo a quello negativo, ricaviamo

$$|\alpha_s\,(-|Q^2|)|=\frac{1}{b\left[\ln^2\dfrac{|Q^2|}{\Lambda^2}+\pi^2\right]}\cdot\left\{\left[\ln\frac{|Q^2|}{\Lambda^2}-\frac{a}{b}\ln\sqrt{\ln^2\frac{|Q2|}{\Lambda^2}+\pi^2}\,\right]^2+\right. \tag{3.37}$$
$$\left.+\left[\pi-\frac{a}{b}\tan^{-1}\frac{\pi}{\ln\dfrac{|Q^2|}{\Lambda^2}}\right]^2\right\}^{1/2}$$

e quindi, con i valori (3.36) e (3.33), otteniamo

$$|\alpha_s\,(-M_\psi^2)|=0.20 \tag{3.38}$$

$$|\alpha_s\,(-M_{\psi'}^2)|=0.19 \tag{3.39}$$

$$|\alpha_s\,(-M_\Upsilon^2)|=0.16\ . \tag{3.40}$$

I valori (3.38) e (3.40) sono in ottimo accordo con le valutazioni ot-

tenute precedentemente dai dati sperimentali, utilizzando per le larghezze di decadimento formule all'ordine più basso in α_s. Ciò potrebbe indicare che le correzioni radiative della QCD sono piccole nello schema $\overline{\text{MS}}$. Naturalmente solo valutazioni precise degli effetti radiativi nell'ortoquarkonio permetteranno di verificare questa congettura.

Limitandoci a considerare rapporti di B, troviamo[24]

$$\frac{B_\psi}{B_{\psi'}} = \frac{|\alpha_s(-M_{\psi'}^2)|^3}{|\alpha_s(-M_\psi^2)|^3} = 0.88 \tag{3.41}$$

$$\frac{B_\psi}{B_\Upsilon} = 4\,\frac{|\alpha_s(-M_\Upsilon^2)|^3}{|\alpha_s(-M_\psi^2)|^3} = 2.2 \tag{3.42}$$

Questa valutazione di B_ψ/B_Υ risulta essere in buon accordo con il dato sperimentale[2,3]

$$\left(\frac{B_\psi}{B_\Upsilon}\right)_{\text{sper}} = 2.4 \pm 1.1\ . \tag{3.43}$$

Per quanto riguarda il rapporto $B_\psi/B_{\psi'}$ notiamo che la valutazione (3.41) conferma la congettura fatta al termine del paragrafo 3.1, ossia $B_\psi \sim B_{\psi'}$. Inoltre, utilizzando il valore $B_\psi/B_{\psi'} = 0.88$ ed i valori sperimentali precedentemente riportati di $\Gamma(\psi \to e^+e^-)$, $\Gamma(\psi' \to e^+e^-)$ e $\Gamma(\psi \to 3g \to \text{adroni})$ otteniamo

$$\Gamma(\psi' \to 3g \to \text{adroni}) = 14\ \text{keV} \tag{3.44}$$

e quindi

$$\Gamma_{\text{tot}}(\psi') = 187\ \text{keV}\ , \tag{3.45}$$

risultato compatibile con la misura sperimentale (3.19). La stima data in eq. (3.20) per $\Gamma(\psi' \to 3g \to \text{adroni})$ richiederebbe un valore assai più grande di $B_\psi/B_{\psi'}$; ciò potrebbe essere ottenuto attribuendo una massa efficace al gluone[25-26].

E' interessante notare che il valore di α_s ricavato per la Υ (eq. (3.40)) si accorda molto bene con la determinazione di α_s in analisi di eventi a tre getti in annichilazione e^+e^- ad un'energia di 30 GeV nel sistema di baricentro[27]

$$\alpha_s = 0.17 \pm 0.02\,(\text{stat}) \pm 0.03\,(\text{sist}). \tag{3.46}$$

4. Conclusioni

A conclusione della presente analisi vogliamo innanzitutto sottolineare che i problemi connessi con la fisica del quarkonio, dal punto di vista della loro rilevanza per una verifica della QCD, richiedono ulteriore studio approfondito.

Per quanto attiene al potenziale $q-\bar{q}$ è indispensabile poter distinguere, in base a precise evidenze sperimentali, tra potenziale previsto dalla QCD e potenziali "matematici" ad hoc. Come abbiamo visto precedentemente, l'esistenza di uno stato $q-\bar{q}$ con un nuovo quark più pesante del quark b, sarebbe un elemento cruciale a questo riguardo.

Per ciò che concerne le proprietà dei decadimenti adronici, si è mostrato che valutazioni delle larghezze di decadimento, mediante la formula all'ordine successivo al dominante per α_s ai valori appropriati tipo-tempo di Q^2, sono in buon accordo con i dati sperimentali. Per garantirci però che tale accordo non è accidentale, occorre avere controllo delle correzioni radiative della QCD ai processi di decadimenti dell'ortoquarkonio. Quindi solo un calcolo completo di questi effetti, in un opportuno schema di rinormalizzazione, consentirà di ottenere risultati veramente conclusivi.

BIBLIOGRAFIA

(1) Per rassegne sulla QCD si veda, ad esempio: J. Ellis and C. T. Sachrajda, CERN preprint TH. 2782 (1979); E. Reya, DESY preprint DO-TH 79/20 (1979); A. J. Buras, Rev. Mod. Phys. **52** (1980) 199.

(2) Review of Particle Properties, Rev. Mod. Phys. **52**, No 2 (1980).

(3) H. Schröder, DESY preprint 80/61 (1980).

(4) K. Berkelman, preprint CLNS 80/470 (1980).

(5) E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane and T. M. Yan, Phys. Rev. **D17** (1978) 3090, **D21** (1980) 313, **D21** (1980) 203; K. Gottfried, preprint CLNS 80/467 (180) e bibliografia ivi citata.

(6) J. L. Richardson, Phys. Lett. **82B** (1979) 272.

(7) A. Martin, Phys. Lett. **93B** (1980) 338.

(8) C. Quigg and J. L. Rosner, Comm. on Nuclear and Particle Phys. **A8** (1978) 1 e bibliografia ivi citata.

(9) D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343; H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346.

(10) J. Kogut and L. Susskind, Phys. Rev. **D9** (1974) 3501 e Phys. Rev. **D11** (1975) 395; K. Wilson, Phys. Rev. **D10** (1974) 2445.

(11) W. Celmaster and F. S. Henvey, Phys. Rev. **D18** (1978) 1688.

(12) W. E. Caswell, Phys. Rev. Lett. **33** (1974) 244; D.R.T. Jones, Nucl. Phys. **B75** (1974) 531.

(13) W. Buchmüller, G. Grunberg and S.-H. H. Tye, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 103.

(14) V. A. Novikov, L. B. Okun, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, M. B. Voloshin and V. I. Zacharov, Phys. Rep. **C41** (1978). 1.

(15) T. Appelquist and H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **34** (1975) 43; Phys. Rev. **D12** (1975) 1404.

(16) A. de Rújula and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **34** (1975) 46; T. Appelquist, R. M. Barnett and K. Lane, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **28** (1978) 387.

(17) R. Van Royen and V. Weisskopf, Nuovo Cimento **A50** (1967) 617.

(18) R. Barbieri, R. Kögerler, Z. Kunszt and R. Gatto, Nucl. Phys. **B105** (1976) 125; W. Celmaster, Phys. Rev. **D19** (1979) 1517; E. C. Poggio and H. J. Schnitzer, Phys. Rev. **D20** (1979) 1175; L. Bergström, H. Snellman and G. Tengstrand, Phys. Lett. **B80** (1979) 242.

(19) R. Barbieri, E. d'Emilio, G. Curci and E. Remiddi, Nucl. Phys. **B154** (1979) 535.

(20) L. F. Abbott, Phys. Rev. Lett. **44** (1980) 1569.

(21) W. Celmaster and D. Sivers, preprint ANL-HEP-PR-80/28 (1980); W. Celmaster and R. J. Gonsalves, Phys. Rev. **D20** (1979) 1420.

(22) G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B61** (1973) 455; G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. **B44** (1972) 189.

(23) A. J. Buras, preprint Fermilab-Pub-80/43-THY (1980); W. Celmaster and D. Sivers, preprint ANL-HEP-PR-80/29 (1980).

(24) A. Bottino and C. W. Kim, Lett. Nuovo Cimento 30 (1981) 353.

(25) G. Parisi and R. Petronzio, Phys. Lett. **94B** (1980) 51.

(26) A. Bottino and C. W. Kim, Nuovo Cimento **57A** (1980) 459.

(27) Vedere, per esempio, B. Wiik, relazione presentata a XX International Conference on High Energy Physics at Madison (1980).

Problemi e sviluppi nella fisica delle interazioni forti

Alberto Giovannini *

A Mario Verde, con stima e affetto.

Introduzione

Attorno agli anni '70 la fisica delle interazioni forti subisce una svolta. Viene proposto un nuovo numero quantico per caratterizzare il comportamento dei sottocostituenti degli adroni: la carica di colore. Ha inizio la cromodinamica quantistica (QCD). Quella che sino ad allora poteva esser considerata una parte della fisica delle particelle a carattere prevalentemente fenomenologico acquistava, grazie all'introduzione del nuovo numero quantico, la dignità di *una teoria*.

Essa non cessa di stupire per la semplicità dei principi che la ispirano. Va detto però con chiarezza che la QCD è una teoria "vecchia". Le principali idee che la riguardano risalgono infatti a prima del '75. Chi deve parlarne si trova così nell'imbarazzante situazione di ripetere cose note e già in gran parte standardizzate, ampiamente descritte in pregevoli lavori di rassegna presentati a molte scuole e congressi internazionali, rispetto ai quali è difficile aggiungere qualcosa, se non unire la propria voce al coro degli insoddisfatti per non poter dire della QCD, dopo anni dal suo apparire, e, dopo tanti sforzi per risolverne i principali problemi: questa è *la teoria* delle interazioni forti.

Ci si limiterà pertanto in una prima parte a presentare sinteticamente alcune idee base della QCD, per concentrarsi poi su quella che è stata ritenuta una linea di naturale applicazione e di potenziale sviluppo della teoria: la spiegazione della formazione in urti "duri" dei getti di adroni.

* Istituto di Fisica, Facoltà di Scienze, Università di Salerno.
Scuola di Specializzazione in Fisica Nucleare dell'Università di Torino.
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Torino.

PARTE I

1. La carica di colore: suo confinamento negli adroni

L'idea della carica di colore nasce in un primo tempo in quella che potremo definire la sua versione *"statica"*: si trattava di far quadrare la statistica dei quark convenzionali ("su", "giù", "strano") nel contesto del primitivo schema dell'SU(3).

Si consideri – ad esempio – la risonanza Δ^{++} nello stato 3/2. Essa è descritta in SU(3) da una funzione d'onda di quark in cui tutte e tre gli spin dei quark sono allineati

$$|\Delta^{++}\ ;\ J_3 = 3/2\rangle = |u^{\uparrow}\ u^{\uparrow}\ u^{\uparrow}\rangle\ . \tag{1}$$

La funzione d'onda è dunque *simmetrica* negli indici di spin ($\uparrow\ \uparrow\ \uparrow$) e di quark ($u\ u\ u$); la parte spaziale della funzione d'onda è certamente *simmetrica* trattandosi dello stato fondamentale di un sistema di 3 quarks composto di 3 u-quarks. In conclusione la funzione d'onda *risultante* è attesa avere una struttura totalmente simmetrica, in disaccordo con la struttura antisimmetrica voluta dalla statistica di Fermi per un sistema di oggetti di spin 1/2 (i quarks).

Se si assume però che ciascuno dei quark fondamentali q di "sapore" ["su" (u), "giù" (d) e "strano" (s)] abbia un nuovo grado di libertà e che tale grado di libertà si manifesti in tre stati di colore diversi (per esempio il "rosso" (R) il "verde" (V) e il "blu" (B)), ne segue che la funzione d'onda ***simmetrica spazialmente, in sapore e spin***, risulta ***antisimmetrica*** nell'indice di ***colore***, risolvendo così il problema. Le nuove funzioni d'onda a seconda che debbano descrivere un barione, un antibarione o un mesone avranno pertanto il seguente aspetto

$$|qqq\rangle \to \frac{1}{\sqrt{6}}\epsilon^{ijk}\ |q_i\, q_j\, q_k\rangle\ \text{(barione)}\ , \tag{2}$$

$$|\overline{q}\overline{q}\overline{q}\rangle \to \frac{1}{\sqrt{6}}\ \epsilon^{ijk}\ |\overline{q}_i\ \overline{q}_j\ \overline{q}_k\rangle\ \text{(antibarione)}\ , \tag{3}$$

$$|q\overline{q}\rangle \to \frac{1}{\sqrt{3}}\ |\overline{q}_R\ \overline{q}_R\ + \overline{q}_V\ \overline{q}_V\ + \overline{q}_B\ \overline{q}_B\rangle\ \text{(mesone)}\ , \tag{4}$$

ove ϵ^{ijk} è un tensore antisimmetrico che va ancora sommmato sugli indici di colore i, j, k ; la funzione d'onda del mesone è stata scritta in forma esplicita.

Una prima conseguenza della introduzione della *carica di colore* è dunque la crescita della *molteplicità* degli stati adronici.

Oggi si ritiene che il mondo degli adroni osservati possa essere descritto da quark colorati ("R", "V", "B") di cinque o sei sapori distinti.

La situazione può essere così riassunta:

quark leggeri $\begin{bmatrix} u_R & u_V & u_B \\ d_R & d_V & d_B \end{bmatrix} \longrightarrow$ π, p ... adroni convenzionali

quark pesanti $\begin{bmatrix} c_R & c_V & c_B \\ s_R & s_V & s_B \end{bmatrix} \longrightarrow$ J/ψ ,

quark superpesanti $\begin{bmatrix} t_R(?) & t_V(?) & t_B(?) \\ b_R & b_V & b_B \end{bmatrix} \longrightarrow$ D, F, Υ,

ove c sta per quark "incantato", b per quark "bellezza" t per quark "verità"; di essi il quark t non è stato ancora osservato. Gli esperimenti in e^+e^- (PETRA) sembrano rinviare nel tempo la sua eventuale scoperta.

Una caratteristica comune a tutti gli *stati adronici osservati* è di avere numero quantico di *colore zero*, mentre *tutti gli stati le cui somme sugli indici di colore sono diverse da zero non sono stati osservati in natura.* In termini matematici sono ammessi solo quei prodotti di tre quark colorati che formano un *singoletto di colore* dai prodotti delle corrispondenti rappresentazioni del gruppo SU(3). Esempio:

$$\left.\begin{array}{ll} 3 \times 3 \times 3 & = 1 + 8 + 8 + 10 \\ \bar{3} \times 3 & = 1 + 8 \end{array}\right] \quad \text{stati ammessi ed osservati ;}$$

$$3 \times 3 = \bar{3} + 6$$
$$3 \times 3 \times \bar{3} = 3 + 6 + 8 + 10$$
] stati non ammessi ed in effetti non osservativi.

Si può dunque già su questa base enunciare un principio molto importante. ***Tutti gli osservabili fisici (adroni, correnti...) sono singoletti di colore.***

Si tratta del cosiddetto *"dogma" del confinamento*.

L'inosservabilità della carica di colore si traduce nella affermazione che essa sia confinata negli adroni.

La situazione è analoga a quella in cui si trovava la carica elettrica negli atomi, prima che si fosse in grado di "romperli".

La spettroscopia degli adroni è di per sé una brillante conferma delle ipotesi della esistenza della carica di colore. Il perché di un tale successo di una teoria semplice (e per di più non relativistica) di stati legati di quark è tuttora oscuro.

Ma la teoria va oltre e suggerisce, già a questo livello di formulazione sulla base di argomentazioni elementari che la *struttura* dello spettro delle masse degli adroni, e quindi l'interazione tra quark per formare gli adroni, sia dovuta a gluoni *vettoriali e colorati*.

Se, infatti, la carica di colore non esistesse, la stessa logica che spiega – ad esempio – per i mesoni che la *massa della particella ρ è maggiore della massa della particella π* ($m(\rho) > m(\pi)$) implicherebbe nel caso dei barioni che la massa del protone è – contrariamente ai dati sperimentali – maggiore di quella della particella Δ,

$$m(p) > m(\Delta)\,. \tag{5}$$

Il punto è il seguente: nella elettrodinamica quantistica (QED) l'interazione di contatto tra i momenti magnetici dell'elettrone e del protone spiega bene la struttura iperfine dei livelli energetici dell'atomo di idrogeno per cui è – come noto – ${}^3S_1 > {}^1S_0$.

In piena analogia, l'introduzione della carica di colore (e delle nuove forze che essa determina) mentre da una parte mantiene il segno della QED per il sistema $q\bar{q}$,

$$m\,[\bar{q}\,q\,;\uparrow\uparrow] > m\,[\bar{q}\,q\,;\uparrow\downarrow] \tag{6}$$

i.e. $m(\rho) > m(\pi)$, dall'altra altera il segno predetto della QED della

interazione di contatto per il sistema qqq

$$m\,[qqq\,;\uparrow\uparrow\uparrow] < m\,[qqq\,;\uparrow\downarrow\uparrow] \quad \text{i.e. } m(\Delta^{++}) < m(p)\,. \qquad (7)$$

E' il carattere non-abeliano delle nuove forze associate alla carica di colore e dominate dallo scambio di un gluone colorato a dettare il nuovo ordine per cui da esso risulta, come ha da essere,

$$m(\Delta^{++}) > m(p)\,. \qquad (8)$$

L'accoppiamento tra quark colorati $(q_i\ q_j)$ in un singoletto di colore del barione è cioè dello stesso segno di quello tra un quark (q_i) ed un antiquark $(\bar{q}_j)$ e metà della sua grandezza: il sistema $\bar{q}$ si comporta come il sistema qq; questo fatto spiega così anche perché i sistemi $q\bar{q}$ sono legati mentre non lo sono quelli qq.

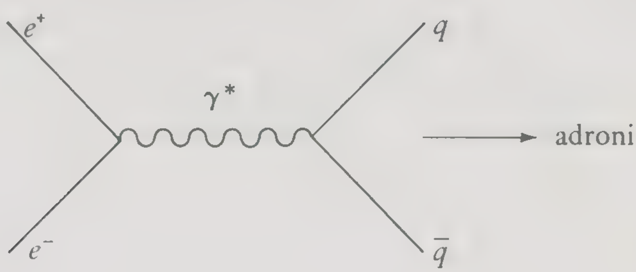
In un mondo senza colore gli accoppiamenti dei quark nei sistemi $(q_i\ q_j)$ e $(q_i\ \bar{q}_j)$ avrebbero segni opposti e risulterebbero della stessa grandezza.

2. Compatibilità della ipotesi della carica di colore con i dati sperimentali

Sebbene il numero quantico del colore sia confinato negli adroni e non misurabile *direttamente*, esistono in natura dei fatti sperimentali che non trovano spiegazione senza la sua introduzione e che vengono considerati delle *prove indirette* della sua esistenza.

a. *Annichilazione e^+e^- in adroni*: $e^+e^- \longrightarrow$ adroni

All'ordine più basso della QED questo processo è descritto dalla annichilazione della coppia e^+e^- in un fotone virtuale; il fotone quindi può disintegrarsi in qualunque cosa che sia carica elettricamente ed in particolare in una coppia $q\bar{q}$ che poi genera adroni



Ne risulta:

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{adroni})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = (\sum_i e_i^2)\, N_c \; ; \tag{9}$$

i è l'indice relativo alle cariche elettriche dei quark, N_c il numero di colori della teoria.

Ora per $N_c = 3$

$R =$
- 2 sottosoglia del quark "incantato" (valore sperimentale $2 \div 2.5$),
- $\frac{10}{3}$ soprasoglia del quark "incantato" (valore sperimentale $4 \div 4.5$).

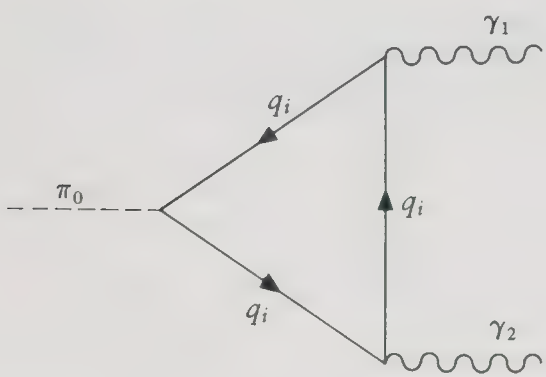
Alla consistenza del primo dato (sottosoglia) fa riscontro una apparente inconsistenza del secondo dato (soprasoglia).

Tale inconsistenza viene ridimensionata sottraendo al dato sperimentale la carica del leptone τ_- (una unità di carica).

Se N_c fosse uguale a 1 i due dati $R = \frac{2}{3}$ e $R = \frac{10}{9}$ risulterebbero totalmente inconsistenti coll'esperimento.

b. *Decadimento* $\pi_0 \to 2\gamma$.

La probabilità di questo decadimento può essere calcolata, applicando la *PCAC* in funzione della costante di decadimento debole del pione ($F_\pi \simeq 0.96\ M_\pi$) e del numero di cariche dei quark che contribuiscono al diagramma triangolare



Si ha così

$$\Gamma_{\pi_0 \to 2\gamma} \cong 7.87 \left(\frac{N_c}{3}\right)^2 eV . \qquad (10)$$

Tale predizione teorica è da confrontare col dato sperimentale 7.95 ± 0.55 *eV*.

E' chiara la consistenza dei due risultati se $N_c = 3$.

c. *Rinormalizzabilità della teoria di gauge*.

E' noto che la condizione per cancellare i diagrammi triangolari anomali, onde avere una teoria rinormalizzabile (si pensi ai modelli basati su SU(2) × U(1)), si traduce nella richiesta che la traccia della matrice della *carica totale fermionica* sia uguale a zero:

$$Tr.\ Q_{\text{tot. fermionica}} = Tr.\ [Q_{\text{leptoni}} + Q_{\text{adroni}}] = 0. \qquad (11)$$

Ad esempio in una teoria con 4 leptoni e 4 sapori

$$Tr.\ \underset{(\nu_e, e, \nu_\mu, \mu)}{Q_{\text{leptoni}}} = [(0) + (-1) + (0) + (-1)] = -2 , \qquad (12)$$

$$Tr.\ \underset{(u,d,s,c)}{Q_{\text{adroni}}} = \left[\left(\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\right] = \frac{2}{3} \cdot \qquad (13)$$

La condizione

$$Tr.\ Q_{\text{tot. fermionica}} = 0 \qquad (14)$$

non può dunque essere soddisfatta. Lo è sicuramente invece in una teoria colorata ($N_c = 3$); in tal caso infatti la traccia delle cariche adroniche risulterà

$$Tr.\ Q_{\text{adroni}} = N_c \frac{2}{3} . \qquad (15)$$

Di conseguenza il colore stabilisce una insospettata connessione tra i LEPTONI e i QUARK, i costituenti degli adroni.

Esempio: si introduca il leptone pesante τ, cioè accanto ai doppietti (ν_e, e) e (ν_μ, μ) si consideri il doppietto (ν_τ, τ) è chiaro che ora

$$Tr.\ Q_{\text{leptoni}} = -3 . \qquad (16)$$

Per ottenere

$$Tr.\ Q_{\text{adroni}} = 3 , \qquad (17)$$

onde avere la cancellazione richiesta per la totalità delle cariche fermioniche, è necessario introdurre un nuovo doppietto di quark, il (t, b) appunto.

Solo allora in una teoria colorata, $N_c = 3$,

$$\begin{aligned} Tr. \underset{(u,d,c,s,t,b)}{Q_{\text{adroni}}} &= 3\left[\left(\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) + \right. \\ &\left. + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = 3 . \end{aligned} \tag{18}$$

E' la *universalità leptone-adrone.*

d. *Decadimento del leptone* τ

Dei tre decadimenti

$$\begin{aligned} &\tau \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \\ &\tau \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau \\ &\tau \to (\bar{u} + d) + \nu_\tau \to \text{adroni} + \nu_\tau \end{aligned} \tag{19}$$

che, una teoria senza il numero quantico di colore vorrebbe equiprobabili, sperimentalmente il terzo decadimento sembra il più favorito, come richiesto da una teoria con colore.

La descrizione di altri fatti più complessi esula dallo scopo di questa breve introduzione.

3. Il gruppo del colore e formulazione della QCD .

A differenza del vecchio SU(3), che è violato sia dalla massa del quark strano, che dalle interazioni elettro-magnetiche, il gruppo del colore $SU(3)_c$ è assunto essere una simmetria esatta sia *localmente* che *globalmente*; non si può cioè concepire un esperimento che misuri le rotazioni nello spazio del colore da uno stato colorato ad un altro, di più, tali rotazioni possono essere fatte indipendentemente le une dalle altre in punti diversi dello spazio-tempo.

La presenza di una *simmetria locale* suggerisce che l'interazione tra quark colorati sia descritta da una teoria di Yang e Mills. Si tratta in questo caso di una *teoria di gauge non-abeliana*.

Le *interazioni forti*, sulla base di queste considerazioni, sono dun-

que interazioni tra costituenti fondamentali (i quark) *colorati* ("rosso", "verde", "blu") di spin 1/2 e le forze che si esercitano tra di esse sono mediate da un ottetto di campi vettoriali (i gluoni); questi ultimi non trasportano né carica elettrica né sapore ("su", "giù", "strano", "incantato", "bellezza" ...), ma carica di colore. I gluoni in virtù del carattere non-abeliano della teoria non interagiscono solo con i quark, ma anche tra di loro.

Formalmente dunque si introducono i campi dei quark

$$\psi_j : \quad \begin{bmatrix} u_R \\ u_V \\ u_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_R \\ d_V \\ d_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_R \\ s_V \\ s_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_R \\ c_V \\ c_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_R \\ b_V \\ b_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \cdots \tag{20}$$

j è l'indice di sapore.

L'interazione forte agisce per così dire lungo la verticale (è un'interazione tra costituenti "colorati"), mentre le interazioni deboli ed elettromagnetiche agiscono lungo la rispettiva orizzontale (si tratta di una interazione tra costituenti "saporiti").

Quindi i campi vettoriali gluonici:

$$A^{\mu}_{a=1\ldots 8}\,. \tag{21}$$

La lagrangiana in accordo colle prescrizioni di una tale teoria assume la seguente forma standard:

$$L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}_{a} F_{a\mu\nu} + i\,\bar{\psi}_j \gamma_\mu D^{\mu}_{jk} \psi_k - \bar{\psi}_j M_{jk} \psi_k\,, \tag{22}$$

ove il primo termine a *dx* è la lagrangiana *pura* di Yang-Mills per campi di gauge autointeragenti, il secondo termine è il termine di interazione tra quark e gluoni, il terzo è la matrice di massa dei quark.

Si noti che:

a) $$F^{\mu\nu}_{a} = \partial^{\mu} A^{\nu}_{a} - \partial^{\nu} A^{\mu}_{a} + g\, f_{abc} A^{\mu}_{b} A^{\nu}_{c}\;; \tag{23}$$

con f_{abc} si sono indicate le costanti di struttura di $SU(3)_c$:

$$[I_a, I_b] = i\, f_{abc}\, I_c\,. \tag{24}$$

(Le matrici di Gell-Mann λ_a sono legate alle matrici I_a dalla relazione $I_a = \frac{1}{2}\lambda_a$).

b) $$D^{\mu}_{jk} = \delta_{jk}\, \partial^{\mu} - ig(I_a)_{jk}\, A^{\mu}_a \, . \qquad (25)$$

c) Le interazioni tra i gluoni e tra quarks e gluoni sono descritte dalla stessa costante di accoppiamento (universalità dell'accoppiamento!). Nasce spontaneo a questo punto il confronto con la struttura della più antica teoria di gauge che conosciamo, la elettrodinamica quantistica (QED).
Si possono facilmente notare assieme a delle analogie formali significative due differenze sostanziali; la prima in merito al gruppo di simmetria (abeliano (U(1)) nella QED e non-abeliano (SU(3)) nella QCD), la seconda riguardo alle topologie tipiche delle due teorie. Si tratta della comparsa dell'accoppiamento di tre gluoni (topologia 3. e 4. della QCD), che non ha analogo nella QED (vedi pag. 153).
Questi fatti hanno una conseguenza comune nel diverso comportamento della costante di accoppiamento delle due teorie. E' il problema della cosiddetta libertà asintotica alle piccole distanze o a grandi quantità di moto trasferite.

4. La libertà asintotica.

a. *Argomento qualitativo*.

Una carica di colore ha due effetti sul campo circostante: I° come nella QED si assiste alla "polarizzazione del vuoto", alla creazione cioè di coppie $q\bar{q}$ e quindi ad una densità di carica opposta a quella della sorgente; l'effetto provoca una *schermatura* della sorgente. II° a differenza di ciò che accade per la carica elettrica nella QED si assiste ad un travaso della carica di colore dalla sorgente al campo circostante, grazie all'accoppiamento dei gluoni tra loro; l'effetto provoca una *antischermatura* della sorgente.

Sotto particolari condizioni (il numero dei sapori minore di 16) prevale l'antischermatura.

Essendo la carica totale fissata ci si attende in tale caso che per distanze molto piccole la carica tenda ad annullarsi.

Riassumendo, nella QED la carica elettrica effettiva sperimentata dalla carica elettrica di prova tende a *crescere* alle piccole distanze, mentre nella QCD la carica di colore effettiva sperimentata dalla carica di colore di prova tende a *decrescere* alle piccole distanze.

	QED	QCD
numeri quantici	carica elettrica	carica di colore
gruppi di simmetria	U(1)	SU(3)
proprietà di trasformazione della sorgente	$e \to e^{iQ\theta} e$	$q_i \to (e^{i I_a \cdot \omega})_{ij}\, q_j$
quanti della forza accoppiati alla corrente	fotone (senza massa)	gluone (senza massa)
variabili del campo	$A_\mu(x)$	$\sum_{a=1}^{8} I_a A_\mu^a(x)$
sostituzione di gauge	$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \to \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA^\mu(x)$	$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \to \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ig \sum_{a=1}^{8} I^a A_a^\mu(x)$

TOPOLOGIE TIPICHE

